راهنما و سؤالات امتحانی ریاضیات و کاربرد

آن در مدیریت

ویژه دانشجویان حسابداری و مدیریت

انتشارات حافظ پژوه

گردآورنده: علی زارعی

سرشناسه	:زارعی، علی،۱۳۴۶-
عنوان و نام پدید آور	: راهنما وسؤالات امتحانی ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت ویژه دانشجویان حسابداری و مدیریت/گردآورنده علی زارعی.
مشخصات نشر	: تهران: حافظ پژوه، ۱۳۸۸.
مشخصات ظاهری	: ۱۳۰ص.
شابک	:۹۷۸-۹۶۴-۲۶۶۶-۰۲-۷
وضعیت فهرست نویسی	:فیپا
موضوع	: ریاضیات – راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	: ریاضیات – آزمونها و تمرین ها (عالی)
رده بندی کنگره	: ۱۳۸۸ ۲ر۲ز/۳۷/۲ QA
رده بندی دیویی	: ۵۷/۱۰۶
شماره کتابشناسی ملی	: ۱۶۸۵۳۳۸

نام کتاب: راهنما و سؤالات امتحانی ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت

گرد آورنده: علی زارعی

ناشر: انتشارات حافظ پژوه

سال چاپ: ۱۳۸۸

تیراژ:۱۰۰۰

قیمت:۲۵۰۰ تومان

چاپ: بهاره

شابک:۷-۰۲-۲۶۶۶-۹۶۴-۹۷۸ **ISBN:۹۷۸-۹۶۴-۲۶۶۶-۰۲-۷**

آدرس: فلکه دوم صادقیه- تقاطع سازمان آب و اشرفی اصفهانی

انتشارات حافظ پژوه ۰۹۱۲۳۲۱۱۰۷۸- ۴۴۲۴۱۷۵۰

فهرست مطالب

مقدمه

کتاب حاضر ویژه دانشجویان رشته های حسابداری و مدیریت دانشگاه پیام نور می باشد که ابتدا تدریس کامل کتاب انجام شده و سؤالات امتحانی فوق بر اساس طرح تجمیع و سالهای قبل آن می باشد که امید است این کتاب بتواند برای بهتر یادگیری دانشجویان و موفقیت آنها را در آزمون یاری کند و در پایان از همکاران گرامی آقایان نادر نیک منش و همایون عزتی تشکر می کنم که اینجانب را یاری نمودند.

در ضمن خواهشمند است رهنمودهای خود را برای کیفیت بهتر به اینجانب اطلاع دهید.

همراه: ۰۹۱۲۳۲۱۱۰۷۸

پست الکترونیکی: Hafez pazhohenoor@yahoo.com

و من الله توفیق

فصل اول

تابع اولیه

قبلاً دیده ایم که اگر تابعی در دست باشد چگونه می توان مشتق را بدست آورد. اکنون می خواهیم بدانیم چگونه می توان تابعی که مشتق آن معلوم است را بدست آورد. به عمل تعیین تابع اولیه، انتگرال گیری یا ضد مشتق گیری گویند.

تعریف تابع اولیه:

هرگاه تابع $f(x)$ تابع پیوسته ای بر بازه (a,b) باشد اگر تابع $F(x)$ در رابطه $F'(x)=f(x)$ صدق کند، $F(x)$ را یک تابع اولیه $f(x)$ می نامند. به عنوان مثال x^3 یک تابع اولیه برای $3x^2$ است زیرا $(x^3)'=3x^2$. و همانگونه که میدانیم مشتق عدد ثابت صفر است بنابراین هر یک از توابع زیر نیز یک تابع اولیه برای $f(x)=3x^2$ می باشد

$$x^3+1, x^3+\sin 30^\circ, x^3-\frac{\pi}{2}, x^3-\sqrt{2}, \ldots\ldots$$

بنابراین $F(x)+C$ که C هر عدد ثابت دلخواه می تواند باشد. یک تابع اولیه برای تابع $f(x)$ میباشد.

انتگرال نامعین:

اگر $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد. آنگاه هر تابع اولیه دیگر $F(x)$ به صورت $F(x)+C$ خواهد بود که در آن C مقدار ثابتی است از این رو نماد $(\int f(x))$(انتگرال $f(x)$) را برای نمایش کلیه توابع اولیه $f(x)$ بکار برده می شود. یعنی $\int f(x)dx= F(x)+C$

قضیه: اگر تابع $f(x)$ در فاصله I پیوسته باشد. آنگاه تابع $f(x)$ دارای انتگرال نامعین است.

فرمولهای اساسی انتگرال:

$$1)\int adx = ax + c$$

مثال: انتگرال (تابع اولیه) $F(x)$ را برای $f(x)=6$ را بدست آورید.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int 6dx = 6x + c$$

$$2)\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

مثال: انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

$$\text{الف})\int x^5 dx = \frac{1}{5+1}x^{5+1} + c = \frac{1}{6}x^6 + c$$

$$\text{ب})\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + c = -\frac{1}{3}x^{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$$

$$\text{ج})\int \sqrt[7]{x^4}dx = \int x^{\frac{4}{7}}dx = \frac{1}{\frac{4}{7}+1}x^{\frac{4}{7}+1} + c = \frac{7}{11}x^{\frac{11}{7}} + c = \frac{7}{11}x \times x^{\frac{4}{7}} + c = \frac{7}{11}x\sqrt[7]{x^4} + c$$

$$3)\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int\left[x^{3}+\frac{1}{x^{4}}+\sqrt[5]{x^{2}}\right]dx=\int x^{3}dx+\int\frac{1}{x^{4}}dx+\int\sqrt[5]{x^{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{3+1}x^{3+1}+\frac{1}{-4+1}x^{-4+1}+\frac{1}{\frac{2}{5}+1}x^{\frac{2}{5}+1}+c=\frac{1}{4}x^{4}-\frac{1}{3x^{3}}+\frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^{2}}+c$$

$$4)\int\frac{dx}{x}=Ln(x)+c$$

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

نکته: عدد ثابت از داخل انتگرال بیرون می آید

$$\int\frac{7}{x}dx=?$$

$$\int\frac{7}{x}dx=7\int\frac{dx}{x}=7Ln(x)+c$$

$$5)\int e^{x}dx=e^{x}+c$$

مثال:تابع اولیه $f(x)=\frac{e^{x}}{8}$ را بدست آورید.

$$\int\frac{e^{x}}{8}dx=\frac{1}{8}\int e^{x}dx=\frac{1}{8}e^{x}+c$$

$$6)\int\sin xdx=-\cos x+c$$

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int 5\sin dx=5\int\sin xdx=-5\cos x+c$$

$$7)\int\cos xdx=\sin x+c$$

مثال: تابع اولیه $F(x),\frac{\cos x}{7}$ را بدست آورید.

$$\int\frac{\cos x}{7}dx=\frac{1}{7}\int\cos xdx=\frac{1}{7}\sin x+c$$

$$8)\int(1+tg^{2}x)dx=\int\sec^{2}xdx=\tan x+c$$

مثال: تابع اولیه$F(x)$ را برای $f(x)=tg^{2}x$ را بدست آورید.

ابتدا (±1) را به تابع اضافه می کنیم تا بتوانیم با استفاده از رابطه ۸ تابع اولیه را محاسبه کنیم

$$\int\tan^{2}xdx=\int(\tan^{2}x+1-1)dx=\int(\tan^{2}x+1)dx=\int dx+\tan x-x+c$$

$$9)\int(1+\cot^{2}x)dx=\int\csc^{2}xdx=-\cot x+c$$

مثال: تابع اولیه $f(x)=5\csc^2 x$ را بیابید.

$$\int 5\csc^2 x dx = 5\int \csc^2 x dx = -5\cot x + c$$

۱۰) $\int \tan x dx = -\mathrm{Ln}|\cos x| + c = \mathrm{Ln}|\sec x| + c$

تمرین: تابع اولیه $f(x)=6\tan x$ را بدست آورید.

$$F(x)=\int 6\tan x dx = 6\mathrm{Ln}|\sec x| + c$$

۱۱) $\int \cot x dx = \mathrm{Ln}|\sin x| + c$

مثال: انتگرال $f(x)=8\cot x$ را بدست آورید.

$$\int 8\cot x dx = 8\mathrm{Ln}|\sin x| + c$$

۱۲) $\int \sec x.\tan x dx = -\sec x + c$

۱۳) $\int \csc x.\cot x dx = -\csc x + c$

۱۴) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

مثال: تابع اولیه $f(x)=\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ را بدست آورید.

$$F(x)=\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5^2-x^2}} = \sin^{-1}(\frac{x}{5}) + c$$

۱۵) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c \qquad a\rangle 0$

مثال: تابع اولیه $f(x)=\frac{1}{9+x^2}$ را بدست آورید.

$$F(x)=\int \frac{dx}{9+x^2} = \int \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3} + c$$

۱۶) $\int a^x dx = \frac{1}{\mathrm{Ln}a} a^x + c \qquad a \neq 1 \qquad ,a\rangle 0$

مثال: انتگرال $f(x)=6^x$ را بدست آورید.

$$F(x)=\int 6^x dx = \frac{1}{\mathrm{Ln}6} 6^x + c$$

مثال: تابع اولیه‌ای مانند $F(x)$ برای $F(x)=6\cos x + 2e^x + \sin x$ به قسمی تعیین کنید که $F(0)=4$ باشد.

$$F(x)=\int f(x)dx = \int (6\cos x + 2e^x + \sin x)dx = 6\int \cos x dx + 2\int e^x dx + \int \sin x dx$$
$$= 6\sin x + 2e^x - \cos x + c$$

عدد c را باید طوری تعیین کنیم که شرط تابع برقرار باشد.

$$F(x)=4 \Rightarrow 6\sin 0 + 2e^0 - \cos^0 + c = 4 \Rightarrow 0+2-1+c=4 \Rightarrow c=3$$

بنابر این $F(x)=۶\sin x+۲e^{x}-\cos x+۳$

مثال: فرض کنید تابع هزینه نهایی کارخانه ای به صورت $\frac{۱}{۱۰۰}x^{۲}-۵x+۶۰$ است که در آن x تعداد تولید روزانه کارخانه می باشد. اگر هزینه ثابت روزانه کارخانه ۶۰۰۰۰ تومان باشد هزینه کل تولید x واحد در روز را محاسبه کنید.

$TC(x)$: هزینه کل تولید x واحد در روز $\qquad TC(x)=\int T'C(x)dx$

$MC(x)$:$T'C(x)$ تابع هزینه نهایی

$$TC(x)=\int MC(x)dx=\int(\frac{۱}{۱۰۰}x^{۲}-۵x+۶۰)dx=\frac{۱}{۳}x^{۳}-\frac{۵}{۲}x^{۲}+۶۰x+c$$

$$Tc(۰)=\frac{۱}{۳۰۰}(۰)^{۳}-\frac{۵}{۲}(۰)^{۲}+۶۰\times۰+C=۶۰۰۰۰\Rightarrow C=۶۰۰۰۰$$

$$TC(x)=\frac{۱}{۳۰۰}x^{۳}-\frac{۵}{۲}x^{۲}+۶۰x+۶۰۰۰۰$$

تابع اولیه ای مانند $F(x)$ برای تابع های داده شده $f(x)$ به قسمتی تعیین کنید که در شرط داده شده صدق کند. $F(x)=\cos x-\sin x$ $\qquad$ ۱) $F(\frac{\pi}{۲})=۲$

$$F(x)=\int(\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x+c$$

$$F(\frac{\pi}{۲})=\sin\frac{\pi}{۲}+\cos\frac{\pi}{۲}+c=۲\Rightarrow ۱+۰+c=۲\Rightarrow c=۱$$

$$\Rightarrow F(x)=\sin x+\cos x+۱$$

نکته: در توابع کسری که توان صورت بزرگتر یا مساوی توان مخرج باشد. با استفاده از تجزیه یا تقسیم به صورت توابع جبری که روابط آن شناخته شده است تبدیل می کنیم

۲) $F(x)=۱$ $\qquad f(x)=\frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}}dx=\int(۱-\frac{۴}{x^{۲}})dx=\int dx-\int\frac{۴}{x^{۲}}dx=\int dx-۴\int x^{-۲}dx$

$$=x+\frac{۴}{x}+c\Rightarrow F(۴)=۴+\frac{۴}{۴}+c=۱\Rightarrow c=-۴$$

$$F(x)=x+\frac{۴}{x}-۴$$

۳) $F(۰)=۳$ $\qquad f(x)=\frac{x^{۳}+۱}{x+۱}$

$$F(x)=\int\frac{x^{۳}+۱}{x+۱}dx=\int\frac{(x+۱)(x^{۲}-x+۱)}{x+۱}dx=\int(x^{۲}-x+۱)dx$$

$$F(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-\frac{۱}{۲}x^{۲}+x+c\Rightarrow F(۰)=\frac{۱}{۳}(۰)^{۳}-\frac{۱}{۲}(۰)^{۲}+۰+c=۳$$

$$c=۳$$

$$F(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-\frac{۱}{۲}x^{۲}+x+۳$$

دیفرانسیل تابع: عبارت است از مشتق تابع ضربدرdx به عبارتی $dx=U'dx$ که در آن U تابعی بر حسب x است.

مثال: دیفرانسیل $y=x^۲$ را بدست آورید.

$$dy = y'dx \Rightarrow dy = ۲xdx$$

روش های انتگرال گیری: معمولاً از این روشها در مواقعی استفاده می شود که تابع مورد انتگرال گیری با روابط ذکر شده منطبق نباشد.

الف) روش تغییر متغیر یا جانشینی

از این روش در مواردی استفاده می شود که به جای x در روابط ذکر شده قبلی یک چند جمله ای یا یک تابع مورد استفاده قرار گرفته باشدکه آن را U فرض می کنیم مانند:

۱) یک عبارت جبری به توان رسیده باشد مانند: $f(x) = (x^۲ + ۳x)^{۱۰}$

۲)زاویه کلیه توابع مثلثاتی مانند $f(x) = \sin(x^۲ + ۴x), \qquad f(x) = \cos(۶x + ۲)$

۳)توان یک عبارت نمایی $f(x) = e^{x^۲+۴} \quad , \quad f(x) = ۶^{x^{۳+۴x^۲}}$

۴) توابع لگاریتمی $f(x) = Ln(x^۲ - ۶x)$

که محاسبه انتگرال آنها با استفاده از قاعده زنجیره ای برای انتگرال گیری انجام می گیرد.

قضیه: فرض کنید $g(x)$ تابعی مشتق پذیر از x و $g(x)\in I$ باشد بطور کلی $f(x)$ روی I تعریف شده و $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ بر I باشد. در این صورت قرار دهید $U=g(x)$ آنگاه:

$$\int f(g(x)g'(x)dx = \int f(U)dx = \int f(U)U'dx = F(U) + c = F(g(u) + c$$

بنابراین می توان روابط قبلی را بصورت زیر درآورد.

$$۱)\int dU = U + c$$

$$۲)\int U^n dU = \int U'U^n dx = \frac{۱}{n+۱}U^{n+۱} + c$$

مثال: انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف})\int (x^۲ + ۱)^{۱۰}(۲x)dx = ?$$

ابتدا عبارت زیر توان را U فرض می کنیم. یعنی:

$$U = x^۲ + ۱ \Rightarrow dU = ۲xdx$$

$$\Rightarrow \int (x^۲ + ۱)^{۱۰}(۲x)dx = \int U^{۱۰}dU = \frac{۱}{۱۰+۱}U^{۱۰+۱} + c = \frac{۱}{۱۱}U^{۱۱} + c$$

اکنون به جای U مقدارش را قرار می دهیم

$$F(x) = \frac{۱}{۱۱}(x^۲ + ۱)^{۱۱} + c$$

$$\text{ب})\int (x^۳ + ۵)^{۲۰}x^۲dx = ?$$

مشاهده می شود عدد۳ برای dU کم است $U = x^۳ + ۵ \Rightarrow dU = ۳x^۲dx$

بنابراین داخل انتگرال را در عدد ۳ ضرب می کنیم تا dU حاصل شود و در $\frac{1}{3}$ضرب می کنیم تا حاصل تغییر نکند یعنی:

$$F(x)=\frac{1}{3}\int(x^{3}+5)^{20}(3x^{2}dx)=\frac{1}{3}\int U^{20}dU=\frac{1}{3}\times\frac{1}{20+1}U^{20+1}+c$$

$$=\frac{1}{63}U^{21}+c\Rightarrow F(x)=\frac{1}{63}(x^{2}+5)^{31}+c$$

ب) $\int \sin^{3}x\cos x dx=?$

$U=\sin x \qquad dU=\cos x dx$

$$F(x)=\int \sin^{3}x\cos x dx=\int U^{3}dU=\frac{1}{3+1}U^{3+1}+c=\frac{1}{4}U^{4}+c=\frac{1}{4}\sin^{4}x+c$$

ت) $\int x(x+1)^{10}dx=?$

$U=x+1\Rightarrow dU=dx$

$U=x+1\Rightarrow x=U-1$

$$(x)=\int x(x+1)^{10}dx=\int(U-1)(U)^{10}dU=\int(U^{11}-U^{10})dU=\frac{1}{12}U^{12}-\frac{1}{11}U^{11}+c$$

$$=\frac{1}{12}(x+1)^{12}-\frac{1}{11}(x+1)^{11}+c$$

در توابع رادیکالی عبارت زیر رادیکال را U فرض می کنیم

ث) $\int x\sqrt[3]{x^{2}+6}\,dx=?$

در عدد۲ و $\frac{1}{2}$عبارت را ضرب می کنیم تا dU حاصل شود. $U=x^{2}+6\Rightarrow dU=2xdx$

$$F(x)=\int x\sqrt[3]{x^{2}+6}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt[3]{U}dU=\frac{1}{2}\int U^{\frac{1}{3}}dU=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{1}{3}+1}U^{\frac{1}{3}+1}+c$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}U^{\frac{4}{3}}+c=\frac{3}{8}U\sqrt[3]{U}+c=\frac{3}{8}(x^{2}+6)\sqrt[3]{(x^{2}+6)}+c$$

۴) $\int\frac{dU}{U}=Ln\left|U\right|+c$

مثال: تابع اولیه $\frac{x}{x^{2}+4}$ را تعیین کنید.

$$\int\frac{xdx}{x^{2}+4}=?$$

تابع داخل انتگرال را در ۲ ضرب می کنیم تا dU حاصل شود $U=x^{2}+4\Rightarrow dU=2xdx$

و در $\frac{1}{2}$ضرب می کنیم حاصل تغییر نکند.

$$F(x)=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\int\frac{dU}{U}=\frac{1}{2}Ln|U|+c=\frac{1}{2}Ln(x^2+4)+c=Ln\sqrt{x^2+4}+c$$

مثال: تابع اولیه tanx را بدست آورید.

$$\int \tan xdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=?$$

در (۱-)و (۱-) ضرب می کنیم تا dU حاصل شود $U=\cos x \quad dU=-\sin xdx$
و حاصل تغییر نکند.

$$\int \tan xdx=(-1)\int\frac{-\sin dx}{\cos x}=-\int\frac{dU}{U}=-Ln|U|+c=-Ln|\cos x|+c$$

$$=Ln\left|\cos x^{-1}\right|+c=Ln|\sec x|+c=Ln|\sec x|+c$$

$$5)\int e^U dU=\int e^U U'dx=e^U+c$$

مثال:انتگرال نامعین $\int x^2e^{x^3+4}dx$ را محاسبه کنید.

$$U=x^3+4\Rightarrow dU=3x^2$$

در عدد ۳ و $\frac{1}{3}$ ضرب می کنیم.

$$F(x)=\int x^2e^{x^3+4}dx=\frac{1}{3}\int e^{x^3+4}(3x^2dx)=\frac{1}{3}\int e^U dU=\frac{1}{3}e^U+c$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}e^{x^3+4}+c$$

مثال: انتگرال نامعین $\int e^{\sin x}\cos xdx$ را بدست آورید.

$$U=\sin x\Rightarrow dU=\cos xdx$$
$$\int e^{\sin x}\cos xdx=\int e^U dU=e^U+c\Rightarrow F(x)=e^{\sin x}+c$$
$$6)\int \sin UdU=\int \sin U(U'dx)=-\cos U+c$$

تابع اولیه $f(x)=x^2\sin(x^3+8)$ را بدست آورید.

$$F(x)=\int f(x)dx\Rightarrow\int x^2\sin(x^3+8)dx=?$$

در عدد ۳ و $\frac{1}{3}$ ضرب می کنیم $U=x^3+8\Rightarrow dU=3x^2dx$

$$\int x^2\sin(x^3+8)dx=\frac{1}{3}\int\sin(x^3+8)(3x^2dx)=\frac{1}{3}\int\sin UdU=-\frac{1}{3}\cos U+c$$

$$\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{3}\cos(x^3+8)+c$$

توجه: کمان توابع مثلثاتی و توان تابع نمایی تغییر نمی کند

مثال: انتگرال نامعین $\int\frac{\sin(Lnx)}{x}dx$ را محاسبه کنید.

$$\int\frac{\sin(Lnx)}{x}dx=?$$

$U = Lnx \to dU = \dfrac{dx}{x}$

$\int \dfrac{\sin(Lnx)}{x}dx = \int \sin U dU = -\cos U + c = -\cos(Lnx) + c$

۷) $\int \cos U dU = \int \cos U (U' dx) = \sin U + c$

مثال: تابع اولیه $f(x) = (x+۲)\cos(x^{۲} + ۴x)$ را بدست آورید.

$F(x) = \int (x+۲)\cos(x^{۲} + ۴x)dx = ?$

$U = x^{۲} + ۴x \Rightarrow dU = (۲x+۴)dx = ۲(x+۲)dx$ در ۲ و $\frac{۱}{۲}$ ضرب می کنیم

$\int (x+۲)\cos(x^{۲}+۴x)dx = \frac{۱}{۲}\int \cos(x^{۲}+۴x)(۲(x+۲)dx) = \frac{۱}{۲}\int \cos U dU$

$= \sin U + c \Rightarrow F(x) = \frac{۱}{۲}\sin(x^{۲}+۴x) + c$

مثال: تابع اولیه $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ را محاسبه کنید.

$F(x) = \int \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = ?$

$U = \sqrt{x} \Rightarrow dU = \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}dx$

در ۲ و $\frac{۱}{۲}$ ضرب می کنیم

$\int \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = ۲\int \cos\sqrt{x}(\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}dx) = ۲\int \cos U dU = ۲\sin U + c$

$\Rightarrow F(x) = ۲\sin\sqrt{x} + c$

۸) $\int (۱+\tan^{۲}U)dU = \int \sec^{۲}U dU = \int \sec^{۲}U(U'dU) = \tan U + c$

مثال: انتگرال نامعین $\int \sec^{۲}(۳x+۵)dx$ را محاسبه کنید

$U = ۳x+۵ \Rightarrow dU = ۳dx$

در عدد۳ و $\frac{۱}{۳}$ ضرب می کنیم

$\int \sec^{۲}(۳x+۵)dx = \frac{۱}{۳}\int \sec^{۲}(۳x+۵)(۳dx) = \frac{۱}{۳}\int \sec^{۲}U dU$

$= \frac{۱}{۳}\tan U + c \Rightarrow F(x) = \frac{۱}{۳}\tan(۳x+۵) + c$

۴) $\int (۱+\cot^{۲}UdU)dU = \int \csc^{۲}U du = \int \csc^{۲}U(U'dx) = -\cot U + c$

مثال: تابع اولیه $F(x) = x\csc^{۲}(x^{۲}-۸)$ را محاسبه کنید.

$F(x) = \int x\csc^{۲}(x^{۲}-۸)dx = ?$

در ۲ و $\frac{۱}{۲}$ضرب می کنیم تا dU حاصل شود. $U = x^{۲} - ۸ \Rightarrow dU = ۲xdx$

$$\int x \csc^{۲}(x^{۲} - ۸)dx = \frac{۱}{۲}\int \csc^{۲}(x^{۲} - ۸)(۲xdx) = +\frac{۱}{۲}\int \csc^{۲} Udu$$

$$= -\frac{۱}{۲}\cot U + c \Rightarrow F(x) = -\frac{۱}{۲}\cot(x^{۲} - ۸) + c$$

انتگرال توابع sinx و cosxبا توان زوج:

در این صورت تغییر متغیر $\cos^{۲} x = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲}, \sin^{۲} x = \frac{۱ - \cos ۲x}{۲}$را انجام داده سپس انتگرال را محاسبه می کنیم.

مثال: تابع اولیه$\sin^{۲}x$ را بدست آورید.

$$\int \sin^{۲} xdx = \int \frac{۱ - \cos ۲x}{۲}dx = \frac{۱}{۲}\int (۱ - \cos ۲x)dx = \frac{۱}{۲}\left[x - \frac{۱}{۲\sin ۲x}\right] + c$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x + c$$

ب)روش جزءبه جزء:

همانگونه که میدانیم اگر $y = u.v \Rightarrow y' = U'V + V'U$

$$d(UV) = VdU + VdV$$

$$UdV = d(UV)VdU$$

از طرفین انتگرال می گیریم $\int UdV = \int d(UV) - \int VdU$

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

که رابطه دستور انتگرال جزءبه جزء است از این دستور برای انتگرال گیری توابعی که به صورت ضرب دو تابع غیر همجنس مانند: جبری،مثلثاتی،مثلثاتی و نمائی،لگاریتمی، مثلثاتی و جبری ، لگاریتمی و غیره استفاده می شود. در این روش سعی می شود توابعی مانند LnU و $\cot^{-۱}U, \cos^{-۱}U, \tan^{-۱}U, \sin^{-۱}U$ و .... را به عنوان تابع U فرض می کنیم تا با مشتق گرفتن به توابع جبری تبدیل شود و در صورتی که این توابع در مسئله نباشد تابعی که با مشتق گرفتن توانش کم می شود را U فرض می کنیم و باقیمانده را dV در نظر می گیریم.

مثال: با استفاده از روش جزء به جزء انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int x \cos ۲xdx$

$$U = x \xrightarrow{\text{مشتق}} dU = dx$$

$$dV = \cos ۲xdx \xrightarrow{\text{انتگرال}} V = \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

$$\int x\cos ۲xdx = \frac{۱}{۲}x\sin ۲x - \int \frac{۱}{۲}\sin ۲xdx = \frac{۱}{۲}x\sin ۲x + \frac{۱}{۴}\cos ۲x + c$$

$$\begin{array}{c|c} U & (dV) \\ \hline x & + \cos 2x \\ 1 & + \frac{1}{2}\sin 2x \\ 0 & - \frac{1}{4}\cos 2x \end{array}$$

$$\int x\cos 2x dx = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

$2) \int xe^{3x}dx = ?$

$$\begin{cases} U = x \longrightarrow dU = dx \\ dV = e^{3x}dx \longrightarrow V = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$$

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

$$\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c$$

$$\begin{array}{c|c} U & dV \\ \hline x & + e^{3x} \\ 1 & - \frac{1}{3}e^{3x} \\ 0 & \frac{1}{9}e^{3x} \end{array}$$

$$\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c$$

$3) \int Lnxdx = ?$

Lnx را U فرض می کنیم تا با مشتق گرفتن به تابع جبری تبدیل شود

$$\begin{cases} U = Lnx \xrightarrow{\text{مشتق}} dU = \frac{dx}{x} \\ dV = dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} V = x \end{cases}$$

$$\int Udx = UV - \int VdU$$

$$\int Lnxdx = xLnx - \int x\frac{dx}{x} = xLnx - x + c$$

$4) \int x^2 \cos xdx = ?$

$$\begin{cases} x^2 = U \longrightarrow dU = 2xdx \\ \cos xsx = dV \longrightarrow V = \sin x \end{cases}$$

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

$$\int x^2 \cos xdx = x^2 \sin x - 2\int x\sin xdx \qquad \text{I}$$

که در اینجا $\int x\sin xdx$ نیز از طریق روش جزء به جزء قابل محاسبه است.

$\int x\sin xdx = ?$

$$\begin{cases} x = U \longrightarrow dU = dx \\ \sin xdx = dV \longrightarrow V = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x\sin xdx = x\cos x - \int -\cos xdx = -x\cos x + \sin x + c \qquad \text{II}$$

بنابراین بر اساس I و II

$$\int x^{2}\cos x dx = x^{2}\sin x - 2[-x\cos x + \sin x + c] = x^{2}\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$$

$$\begin{array}{c|l} U & dV \\ \hline x^{2} & \cos x \\ 2x & \sin x \\ 2 & -\cos x \\ 0 & -\sin x \end{array}$$

$$\int x^{2}\cos x dx = x^{2}\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$$

$5)\int x\mathrm{Ln}x dx = ?$

$$\int UdV = UV - \int Vdu \qquad \begin{cases} U = \mathrm{Ln}x \longrightarrow dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = xdx \longrightarrow V = \dfrac{1}{2}x^{2} \end{cases}$$

$$\int x\mathrm{Ln}x = \frac{1}{2}x^{2}\mathrm{Ln}x - \int \frac{1}{2}x^{2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^{2}\mathrm{Ln}x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^{2}\mathrm{Ln}x - \frac{1}{4}x^{2} + c$$

$6)\int \tan^{-1}x dx$

$$\int UdV = UV - \int VdU \qquad \begin{cases} U - \tan^{-1}x \longrightarrow dU = \dfrac{dx}{1+x^{2}} \\ dV = dx \longrightarrow V = x \end{cases}$$

$$\int \tan^{-1}x dx = x\tan^{-1}x - \int \frac{xdx}{1+x^{2}} \qquad t = 1 + x^{2} \longrightarrow dt = 2xdx$$

در ۲ و $\frac{1}{2}$ضرب می کنیم تا dt حاصل شود.

$$\int \tan^{-1}x dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^{2}} = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+x^{2}) + c$$

$7)\int e^{x}\cos x dx = ?$

در این تابع e^{x} و cosx پس از مشتق گرفتن یا انتگرال گرفتن مکرر به e^{x} و cosxتبدیل می شود در این گونه مسائل به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

$$\int e^{x}\cos x dx = e^{x}\sin x - \int \sin x e^{x} dx \qquad \mathrm{I}\begin{cases} U = e^{x} \longrightarrow dU^{-} - e^{x}dx \\ dV = \cos x dx \longrightarrow V = \sin x \end{cases}$$

انتگرال $\int \sin x e^{x} dx$ از طریق روش جزء به جزء محاسبه می شود.

$\int \sin x e^{x} dx = ?$

$$\int UdV = UV - \int VdU \qquad \begin{cases} U = e^{x} \longrightarrow dU = e^{x}dx \\ dV = \sin x dx \longrightarrow V = -\cos x dx \end{cases}$$

$$\int \sin x e^{x} dx = -e^{x}\cos x - \int -\cos x e^{x} dx = -e^{x}\cos x + \int e^{x}\cos x dx \qquad \mathrm{II}$$

مشاهده می شود $\int e^x \cos x dx$ نیاز به محاسبه است که تکرار صورت مسئله است بنابراین طبق I و II

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right]$$
$$= \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$
$$\Rightarrow ۲\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x \Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{۲}$$
$$\Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{۱}{۲} e^x [\sin x + \cos x]$$

ج) انتگرال گیری از توابع کسری:

فرض کنید $q(x)$, $p(x)$ دو جمله ای باشند و تابع گویای $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ تعریف شده باشد حالتهای زیر امکان دارد رخ دهد.

۱)درجه $p(x)$ بزرگتر یا مساوی $q(x)$ باشد. در این صورت همانگونه که قبلاً اشاره شد به روش تقسیم یا تجزیه انتگرال را محاسبه می کنیم.

مثال: انتگرال نامعین مقابل را محاسبه کنید. $\int \frac{x^۳ - ۵x^۲ + ۴x + ۱}{x - ۱} dx = ?$

$$\begin{array}{l|l} x^۳ - ۵x^۲ + ۴x + ۱ & x - ۱ \\ \cline{2-2} \underline{x^۳ - x^۲} & x^۲ - ۴x \\ -۴x^۲ + ۴x + ۱ & \\ \underline{-۴x^۲ \pm ۴x} & \\ \quad ۱ & \end{array}$$

$$\int \frac{x^۳ - ۵x + x + ۱}{x - ۱} dx = \int (x^۲ - ۴x) dx + \int \frac{۱}{x - ۱} dx$$
$$= \frac{۱}{۳} x^۳ - ۲x^۲ + Ln|x - ۱| + c$$

۲) درجه $p(x)$ کمتر از $q(x)$ باشد در این صورت حالتهای زیر را بررسی می کنیم

حالت اول: اگر $q(x)$ چند جمله ای دارای عامل خطی $ax+b$ باشد. در این صورت کسر حقیقی را به کسرهای جزئی تبدیل می کنیم.

مثال: انتگرال نامعین مقابل را محاسبه کنید. $\int \frac{dx}{x^۲ - ۹} = ?$

$$\frac{۱}{x^۲ - ۹} = \frac{A}{x - ۳} + \frac{B}{x + ۳} = \frac{A(x + ۳) + B(x - ۳)}{x^۲ - ۹} = \frac{x(A + B)۳A - ۳B}{x^۲ - ۹}$$

چون مخرج ها برابر هستند بنابراین باید صورتها نیز برابر باشند و چون در کسر حقیقی x وجود ندارد بنابراین ضریب آن صفر است

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A-3B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A+3B=0 \\ 3A-3B=1 \end{cases} \Rightarrow 6A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{6}, B=-\frac{1}{6}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-9}=\frac{1}{6}\int \frac{1}{x-3}dx-\frac{1}{6}\int \frac{1}{x+3}dx=\frac{1}{6}Ln\left|x-3\right|-\frac{1}{6}Ln(x+3)+c$$

$$=\frac{1}{6}Ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+c$$

نکته: این گونه مسائل را می توان با استفاده از رابطه زیر حل نمود.

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}Ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c \qquad \int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}Ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$$

به عنوان مثال:

$$\int \frac{dx}{x^2-9}=\int \frac{dx}{x^2-3^2}=\frac{1}{2\times 3}Ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+c=\frac{1}{6}Ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+c$$

$$\int \frac{du}{25-x^2}=\int \frac{du}{5^2-x^2}=\frac{1}{2\times 5}Ln\left|\frac{5+x}{5-x}\right|+c=\frac{1}{10}Ln\left|\frac{5+x}{5-x}\right|+c$$

حالت دوم: اگر $q(x)$ دارای عامل خنثی $(ax+b)^n$ باشد در این صورت کسر مورد نظر را به صورت عامل هایی می نویسیم که توان آنها از ۱ تا n ادامه یابد.

$$\frac{1}{(ax+b)^n}=\frac{A}{(ax+b)}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+.......+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

مثال: انتگرال نامعین مقابل را محاسبه کنید. $\int \frac{x^2-5}{x(x-1)^2}du=?$

$$\frac{x^2-5}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{Ax^2-2Ax+A+Bx^2-Bx+Cx}{x(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2(A+B)+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} A+B=1 & \text{چون ضریب } x^2 \text{ برابر یک است} \\ -2A-B+C=0 & \text{چون ضریب } x \text{ برابر صفر است} \\ A=-5 & \text{چون عدد ثابت برابر ۵- است} \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2-5}{x(x-1)^2}dx=\int \frac{-5dx}{x}+\int \frac{6dx}{x-1}-\int \frac{4dx}{(x-1)^2}$$

$$=-5Ln\left|x\right|+6Ln\left|x-1\right|+\frac{4}{x-1}+c$$

$$U=x-1 \Rightarrow dU=du$$

$$\int \frac{4}{(x-1)^2}du = 4\int \frac{du}{(x-1)^2} = 4\int \frac{du}{U^2} = 4\int U^{-2}du = -4U^{-1}+c = \frac{-4}{x+1}+c$$

حالت سوم: اگر $q(x)$ دارای عامل درجه دوم متمایز x^2+ax+b باشد که ریشه حقیقی ندارد، آنگاه متناظر با عامل کسری $\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$ در تجزیه تابع گویا وجود دارد که مقادیر A و B بایستی محاسبه شود.

مثال: انتگرال نامعین مقابل را محاسبه کنید $\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2+x-1}du$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+c}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x^2(A+B)+x(C-B)+A-C}{(x-1)(x^2+1)}$$

ضرایب را متحد قرار می دهیم.

$$\begin{cases} A+B=1 \\ C-B=1 \\ A-C=0 \Rightarrow A=C \end{cases} \Rightarrow B=0, A=1$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2+x-1}du = \int \frac{du}{x-1}+\int \frac{du}{x^2+1} = Ln|x-1|+\tan^{-1}x+c$$

حالت چهارم: اگر $q(x)$ دارای عامل درجه دوم تکراری $(x^2+ax+b)^m$ باشد که ریشه حقیقی ندارد آنگاه متناظر با این عامل مجموع کسرهای جزیی زیر را می نویسیم.

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+ax+b)^2}+\dots\dots\dots+\frac{A_mx+B_m}{(x^2+ax+b)^m}$$

مثال: انتگرال نامعین مقابل را محاسبه کنید. $\int \frac{x^2+x+6}{(x^2+6)^2}du = ?$

$$= \frac{Ax^3+6Ax+Bx^2+6B+Cx+D}{(x^2+6)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+x(4A+C)+D+6B}{(x^2+6)^2}$$

$$\begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ 4A+C=1 \Rightarrow C=1 \\ 6B+D=6 \Rightarrow D=0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2+x+6}{(x^2+6)^2} = \frac{1}{x^2+6}+\frac{x}{(x^2+6)^2}$$

$$\int \frac{x^2+x+6}{(x^2+6)^2}du = \int \frac{du}{x^2+6}+\int \frac{xdu}{(x^2+6)^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2(x^2+6)}+C$$

$$U = x^2+6 \rightarrow dU = 2xdu$$

$$\int \frac{xdu}{(x^2+6)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdu}{(x^2+6)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dU}{U^2} = \frac{1}{2}\int U^{-2}dU = -\frac{1}{2}U^{-1}+C$$

$$=-\frac{۱}{۲U}+C=\frac{-۱}{۲(x^{۲}+۶)}+C$$

د) توابعی که توان کسری دارند.

در صورتی که عبارت ax+b دارای توان کسری باشد در این صورت ax+b را z^n می گیریم که n کوچکترین مضرب مشترک مخرج توانها می باشد. ($ax+b)=Z^n$)

مثال: انتگرال نامعین $\int \frac{۸x^{۲}du}{(۴x+۱)^{\frac{۵}{۲}}}$ را محاسبه کنید.

$$\int \frac{۸x^{۲}du}{(۴x+۱)^{\frac{۵}{۲}}}=?$$

$$\text{فرض } ۴x+۱=Z^{۲}\Rightarrow x=\frac{z^{۲}-۱}{۴} \qquad ۴x+۱=Z^{۲}\Rightarrow$$

$$۴x+۱=Z^{۲}\Rightarrow ۴dx=۲ZdZ\Rightarrow dx=\frac{ZdZ}{۲}$$

$$\int \frac{۸x^{۲}du}{(۴x+۱)^{\frac{۵}{۲}}}=\int \frac{۸(\frac{z^{۲}-۱}{۴})(\frac{zdz}{۲})}{Z^{۵}}=\frac{۱}{۴}\int \frac{z^{۴}-۲z^{۲}+۱}{Z^{۴}}dz$$

$$=\frac{۱}{۴}\int ۱-\frac{۲}{Z^{۲}}+\frac{۱}{z^{۴}})dz=\frac{۱}{۴}\left[\int dz=-۲\int\frac{۱}{Z^{۴}}dz+\int\frac{۱}{Z^{۴}}dz\right]$$

$$=\frac{۱}{۴}\left[z+\frac{۲}{z}-\frac{۱}{۳z^{۳}}\right]+C=\frac{۱}{۴}\left[\frac{۳z^{۴}+۶z^{۲}-۱}{۳z^{۳}}\right]+C$$

$$=\frac{۱}{۴}\left[\frac{۳(۴x+۱)^{۲}+۶(۴x+۱)-۱}{۳(۴x+۱)^{\frac{۳}{۲}}}\right]+C=\frac{۱}{۴}\left[\frac{۳(۱۶x^{۲}+۸x+۱)+۲۴x+۶-۱}{۳(۴x+۱)^{\frac{۳}{۲}}}\right]+C$$

$$=\frac{۱}{۴}\left[\frac{۴۸x^{۲}+۴۸x+۸}{۳(۴x+۱)^{\frac{۳}{۲}}}\right]+C=\frac{۱۲x^{۲}+۱۲x+۲}{۳(۴x+۱)^{\frac{۳}{۲}}}+C$$

انتگرال معین:

هرگاه تابع نامنحنی و پیوسته y=f(x) در بازه [a,b] باشد. آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

را انتگرال معین F(x) از a تا b نامیده می شود که برای تعیین سطح زیر منحنی و محور xها بکار می رود.

مثال: انتگرال های معین زیر را بدست آورید.

الف) $\int_{-1}^{3} 3x^2 du = \left[x^3\right]_{-1}^{3} = 3^3 - (-1)^3 = 28$

ب) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = +1$

خواص انتگرال معین:

الف) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

ب) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]du = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)du$

پ) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a k(x)dx$

ت) $\int_a^a f(x)du = 0$

ث) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad \forall \subset \in [a,b]$

مثال: انتگرال معین $f(x) = \begin{cases} 3x^2+2 & 0\langle x \langle 1 \\ 2x & 1\langle x\langle 4 \end{cases}$ را دربازه $[4و0]$ محاسبه کنید.

$$\int_0^1 (3x^2+2)dx + \int_1^4 2xdx = x^3+2x\Big]_0^1 + x^2\Big]_1^4 = 3+15 = 18$$

مثال: حاصل انتگرال $\int_{-3}^{4}|x+2|dx$ را بدست آورید.

$$\int_{-3}^{4}|x+2|du = \int_{-3}^{-2} -(x+2)du + \int_{-2}^{4}(x+2)du = -\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{4}$$

$$= -\left[(2-4)-(\frac{9}{2}-6)\right] + \left[(8+8)-(2-4)\right] = \frac{1}{2}+18 = 18/5$$

مثال: سطح زیر منحنی $f(x) = x+4$ را از $x_1 = 1$ تا $x_2 = 3$ را بدست آورید.

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_1^3 (x+4)du = \left[\frac{1}{2}x^2+4x\right]_1^3 = (\frac{9}{2}+12)-(\frac{1}{2}+4) = 12$$ واحدمربع

مثال: مساحت سطح محصور بین $f(x) = x^2-4x+3$ و محور xها و دو خط $x=1$ و $x=2$ رابدست آورید.

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x)du = \int_1^2 (x^2-4x+3)du$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\Big]_1^2 = (\frac{8}{3}-8+6)-(\frac{1}{3}-2+3) = \frac{4}{3}$$ واحد سطح

نکته: هرگاه منحنی پیوسته ای مانند $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ زیر محورxها واقع شده باشد. سطح محصور آن نیز زیر محور xها است که در این حالت مقدار انتگرال a تاb عددی منفی می شود که مساحت منفی نمی تواند باشد. بنابراین قدر مطلق آن را در نظر می گیریم.

مثال: مطلوب است مساحت سطح محصور بین $f(x) = x^2-9$ و محور xها از $x_1 = 1$ تا $x_2 = 2$

$$S=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{1}^{2}(x^2-9)du=\left[\frac{1}{3}x^3-9x\right]_1^2$$

$$=\left|(\frac{18}{3}-18)-(\frac{1}{3}-9)\right|=\left|-\frac{20}{3}\right|\Rightarrow S=\frac{20}{3}\ \text{واحد سطح}$$

نکته: هرگاه منحنی پیوسته $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ دارای ریشه C باشد قسمتی از منحنی بالای محور xها و قسمت زیر محور xها واقع می شود که مساحت آن منحنی منفی می شود.

بنابراین در این مواقع مساحت تک،تک ناحیه ها را بدست آورده و با هم جمع می کنیم.

مثال: مطلوب است مساحت سطح محصور بین منحنی $f(x)=-x^3+3x$ و محور xها و دو خط $x_1=-1, x_2=+1$. ابتدا برای یافتن ریشه معادله $f(x)$ رابرابر صفر قرار می دهیم.

$$F(x)=0\Rightarrow x^3+3x=0\Rightarrow x(x^2+3)=0\Rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{3}$$

$$S=|s_1|+|s_2|=\left|\int_{-1}^{0}f(x)du\right|+\int_{0}^{1}f(x)du$$

$$=\left|\int_{-1}^{0}(-x^3+3x)du\right|+\int_{0}^{1}(-x^3+3x)du=\left|\left[\frac{-x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right|+\left[\frac{-x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\left|\frac{-5}{4}\right|+\left|\frac{5}{4}\right|=\frac{5}{2}=2/5\ \text{واحد سطح}$$

فرض کنید معادلات پارامتری منحنی به صورت $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos t\end{cases}$ باشد. مساحت ناحیه محدود به منحنی بالا و محور xها در بازه $[0و\pi]$ را بدست آورید.

$$x=\sin t\rightarrow dx=\cos t dt$$

$$S=\int_a^b y du=\int_0^{\pi}(\cos t)\cos t dt=\int_0^{\pi}\cos^2 t dt=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\right.\ \text{واحد سطح}$$

مساحت ناحیه بین دو منحنی:

برای محاسبه مساحت ناحیه بین دو منحنی $g(u), f(x)$ کافی است محل تلاقی دو منحنی را بدست آوریم سپس با استفاده از رابطه $S=\int_a^b[f(x),g(x)]du$ مساحت را تعیین کنیم.

مثال: مساحت ناحیه محدود بین نمودارهای x^2 و $g(x)=x$ را تعیین کنید.

ابتدا محل تلاقی در منحنی راتعیین می کنیم

$$f(x)=g(x)$$

$$x=x^2\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x_1=0, x_2=1$$

$$S=\int_a^b(f(x)-g(x)du=\int_0^2(x-x^2)du$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{6}\ \text{واحد سطح}$$

مثال: مساحت بین منحنیهای $y=۷-۲x$ و $y=x+۱$ و $۲y=۲-x$ را بدست آورید.

ابتدا محل تلاقی ۳ منحنی را بدست می آوریم. $۲y=۲-x \Rightarrow y=\frac{۲-x}{۲}$

$$\begin{cases} y=۷-۲x \\ y=x+۱ \end{cases} \Rightarrow ۷-۲x=x+۱ \Rightarrow ۳x=۶ \Rightarrow x=۲$$

$$\begin{cases} y=۷-۲x \\ ۲y=۲-x \end{cases} \Rightarrow ۱۴-۴x=۲-x \Rightarrow ۳x=۱۲ \Rightarrow x=۴$$

$$\begin{cases} ۲y=۲-x \\ y=x+۱ \end{cases} \Rightarrow ۲-x=۲x+۲ \Rightarrow ۳x=۰ \Rightarrow x=۰$$

$$S=\int_۰^۲\left[(x+۱)-(\frac{۲-x}{۲})\right]du+\int_۲^۴\left[(۷-۲x)-(\frac{۲-x}{۲})\right]du=\int_۰^۲\frac{۳}{۲}xdx+\int_۰^۴(۶-\frac{۳}{۲}x)du$$

$$=\left[\frac{۳}{۴}x^۲\right]_۰^۲+\left[۶x-\frac{۳}{۴}x^۲\right]_۲^۴=(۳-۰)+\left[(۲۴-۱۲)-(۱۲-۳)\right]=۶$$

کاربردهای انتگرال معین در اقتصاد:

می دانیم که یک تابع نهایی اقتصادی برابر مشتق تابع کل اقتصادی است بنابراین اگر $MR(x)$ تابع درآمد نهایی یک موسسه باشد به ازای x واحد تولید آنگاه تابع درآمد کل $(TR(x))$ این موسسه برابر است.

$$TR(x)=\int MR(x)du.MR(x)=T'R(x)$$

و هزینه نهایی تولید کننده ای $MC(x)$ باشد به ازای x واحد تولید آنگاه تابع هزینه کل این تولید کننده برابر است با: $TC(x)=\int MC(x)dx, MC(x)=TC'(x)$

مثال: فرض کنید هزینه نهایی موسسه ای به صورت $MC(x)=۶x^۲-۴x+۲$ باشد.

الف) تابع هزینه کل در این موسسه را در حالتی تعیین کنید که هزینه تولید اولین واحد کالا برابر ۴۰ واحد پول باشد.

ب) هزینه کل تولید را به ازای ۵ واحد کالا را بدست آورید.

$$TC(x)=\int MC(x)du=\int(۶x^۲-۴x+۲)du=۲x^۳-۲x^۲+۲x+c$$

به جای x=۱ قرار می دهیم چون هزینه اولین تولید کالا داده شده است.

$$۲(۱)^۳-۲(۱)^۲+۲(۱)+c=۴۰ \Rightarrow c=۳۸$$

بنابراین $TC(x)=۲x^۳-۲x^۲+۲x+۳۸$

ب) به جای x=۵ قرار می دهیم

$TC(x)=۲(۵)^۲-۲(۵)^۲+۲(۵)+۳۸=۲۴۸$ واحد پول

مثال: فرض کنید تابع درآمد نهایی موسسه ای به صورت $MR(Q)=۲۰-۲Q-۳Q^۲$ است تابع درآمد کل و تابع تقاضا را به $P=F(Q)$ را تعیین کنید.

$$TR(Q)=\int MR(Q)dQ=\int(۲۰-۲Q-۳Q^۲)dQ=۲۰Q-Q^۲-Q^۳+c$$

به ازای Q=۰ داریم TR(.)=۰ ، بنابراین C=۰ می شود در نتیجه:

$TR(Q) = ۲۰Q - Q^۲ - Q^۳$

همانگونه که می دانیم درآمد متوسط و تابع تقاضا هر دو دارای مفهوم یکسانی هستند بنابراین

$TR(Q) = PQ \Rightarrow P = \frac{TR(Q)}{Q} = ۲۰ - Q - Q^۲$

مثال: توابع درآمد نهایی و هزینه نهایی موسسه ای عبارتند از: $MC(x) = ۴۰ - ۶x + x^۲ , MR(x) = ۴۰ - ۲x$ مقدار تولید را به گونه تعیین کنید که سود حداکثر شود و حداکثر سود را محاسبه کنید.

جواب: می دانیم تابع سود کل موسسه برابر است با $\pi(x) = TR(x) - TC(x)$

بنابراین مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم تا نقاط Max یا min تعیین شود.

$\pi'(u) = MR(x) - MX(x) = ۰ \Rightarrow MR(x) = MC(x)$

$۴۰ - ۲x = ۴۰ - ۶x + x^۲ \Rightarrow -x^۲ + ۴x = ۰ \Rightarrow x = ۰, x = ۴$

$\pi'(x) = -x^۲ + ۴x$

$\pi''(x) = -۲x + ۴ \qquad \pi''(۰) = ۴, \pi''(۴) = -۲ \times ۴ + ۴ = -۴ \langle ۰$

در نتیجه حداکثر سود موسسه به ازای تولید x=۴ بدست می آید.

حداکثر سود موسسه $= \int_۰^۴ (MR(x) - MC(x)du = \int_۰^۴ (-x^۲ + ۴x)du$

$= \left[-\frac{۱}{۳}x^۳ + ۲x^۲ \right]_۰^۴ = \frac{-۶۴}{۳} + ۳۲ = \frac{۳۲}{۳}$

مازاد مصرف کننده:

اگر تابع تقاضا به صورت y=f(x) نشان دهنده قیمتهای مختلفی باشد که مصرف کننده مایل به پرداخت آن برای یک کالا می باشد. در صورتی که تعادل بازار در نقطه $(x_۰, y_۰)$ ایجاد شود. مصرف کنندگانی که مایل به پرداخت قیمتی بیشتر از نقطه تعادل بازار $(y_۰)$ باشد سود می برند که این سود مازاد مصرف کننده نام دارد و با C.S نشان می دهند و می توان با استفاده از مفهوم سطح محصور آن را محاسبه کرد.

$C.S = \int_۰^{x_۰} F(x)dx - x_۰y_۰$

مثال: تابع تقاضا به صورت $y = ۲۵ - ۳x - ۳x^۲$ می باشد مازاد مصرف کننده ای به ازای $x_۰=۲$ را محاسبه کنید. اگر $x_۰ = ۲ \Rightarrow y_۰ = ۲۵ - ۳(۲) - ۳ \times ۲^۲ = ۷$

$C.S = \int_۰^{x_۰} F(x)dx - x_۰y_۰$

$C.S = \int_۰^۲ (۲۵ - ۳x - ۳x^۲)dx - ۲ \times ۷ = ۲۵x - \frac{۳}{۲}x^۲ - x^۳ \Big]_۰^۲ - ۱۴$

$= (۵۰ - ۱۲ - ۸) - ۱۴ = ۱۶$

مثال: فرض کنید تابع تقاضای کالایی به صورت $y = ۴۸ - ۲x - ۳x^۲$ است. مازاد مصرف کننده را به ازای $y_۰ = ۳۲$ را محاسبه کنید.

$y_۰ = ۳۲ \Rightarrow ۳۲ = ۴۸ - ۲x - ۳x^۲ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲x - ۱۶ = ۰$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۲^۲ - ۴ \times ۳ \times (-۱۶) = ۱۹۶$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۲ \pm \sqrt{۱۹۶}}{۲ \times ۳} \Rightarrow x_۱ = ۲, x_۲ = -\frac{۸}{۳}$$

اعداد منفی برای x قابل قبول نمی باشد.

$$C.S = \int_{۰}^{x_۰} f(x)dx - x_۰ y_۰$$

$$C.S = \int_{۰}^{۲} (۴۸ - ۲x - ۳x^۲)dx - ۲ \times ۳۲ = \left[۴۸x - x^۲ - x^۳\right]_۰^۲ - ۶۴$$

$$= \left[۴۸ \times ۲ - ۲^۲ - ۲^۳\right] - ۶۴ = ۲۰$$

مازاد تولید کننده:

اگر تابع عرضه به صورت $y=F(x)$ نشانگر قیمتهایی باشد که درآن مقادیر مختلفی از یک کالا عرضه مـی شـود. در صورتی که تعادل بازار در نقطه $(x_۰, y_۰)$ ایجاد شود. تولید کنندگانی که مایل به عرضه کالا در قیمتی کمتـر از $y_۰$ باشند کل منافع ایجاد شده برای تولید کننده را مازاد تولید کننده نامند و با $P.S$ نشان مـی دهنـد کـه از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$P.S = x_۰ y_۰ - \int_{۰}^{x_۰} F(x)du$$

مثال: مازاد تولید کننده ای که تابع عرضه کالای آن به صورت $y = ۴ + x$ می باشد را بـه ازای قیمـت $y_۰ = ۷$ محاسبه کنید.

$$y_۰ = ۷ \Rightarrow ۷ = ۴ + x \Rightarrow x = ۳$$

$$P.S = x_۰ y_۰ - \int_{۰}^{x_۰} F(x)du = ۳ \times ۷ - \int_{۰}^{۳} (۴ + x)du = ۲۱ - \left[۴x + \frac{۱}{۲}x^۲\right]_۰^۳$$

$$= ۲۱ - \left[۴ \times ۳ + \frac{۱}{۲} \times ۳^۲\right] = ۴/۵$$

محاسبه تقریبی انتگرالهای معین:

۱-قاعده ذوزنقه ای: فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد. اگر این بازه را به n زیـر بـازه کـه هـر یک به طول $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ با نقاط انتهایی $a = x_۰, x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}, x_n = b$ تقسـیم کنـیم آنگـاه داریم.

$$\int_{a}^{b} F(x)du = \frac{b-a}{۲n}(y_۰ + ۲y_۱ + ۲y_۲ + \ldots + ۲y_{n-۱} + y_n)$$

که در آن $y_i = F(xi)$ به ازای هر $۰ \subseteq i \subseteq n$

مثال: مقدار تقریبی انتگرال $\int_{۲}^{۶} \sqrt{۱ + x^۲}du$ را با استفاده از قائده ذوزنقه ای به ازای $n=۴$ محاسبه کنید.

$b = ۶ \qquad a = ۲ \qquad n = ۴$

i	xi	fi
۰	۲	$\sqrt{۵}$
۱	۳	$\sqrt{۱۰}$
۲	۴	$\sqrt{۱۷}$
۳	۵	$\sqrt{۲۶}$
۴	۶	$\sqrt{۳۷}$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{۶-۲}{۴} = ۱$$

$$\int_{۲}^{۶}\sqrt{۱+x^{۲}}\,du \cong \frac{۶-۲}{۲\times ۴}\left[\sqrt{۵}+۲\sqrt{۱۰}+۲\sqrt{۱۷}+۲\sqrt{۲۶}+\sqrt{۲۷}\right]=۱۶/۱$$

۲- قاعده سیمپسون:

فرض کنید تابع F بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد و بازه $[a,b]$ را به $۲n$ زیر بازه که طول هر یک از زیر بازه های برابر $\Delta x=\frac{b-a}{۲n}$ تقسیم کنیم.

$$\int_{a}^{b}F(x)du=\frac{\Delta x}{۳}(y_{۰}+۴y_{۱}+۲y_{۲}+۴y_{۳}+۲y_{۴}+\ldots+۲y_{۲n-۲}+۴y_{۲n-۱}+y_{۲n}\ ]$$

به ازای هر $F(x)\geq ۰$

مثال: مقدار تقریبی انتگرال معین $\int_{۰}^{۱}x^{۲}du$ را با استفاده از قاعده سیمپسون به ازای $۲n=۴$ بدست آورید.

$$\Delta x=\frac{b-a}{۲n}=\frac{۱-۰}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

$$f(x)=x^{۲}$$

i	xi	$f(xi)$
۰	۰	۰
۱	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۱۶}$
۲	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$
۳	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۹}{۱۶}$
۴	۱	۱

$$\int_{۰}^{۱}x^{۲}dx=\frac{۱}{۱۲}\left[۰+۴\times\frac{۱}{۱۶}+۲\times\frac{۱}{۴}+۴\times\frac{۹}{۱۶}+۱\right]=\frac{۱}{۳}$$

دستور منشور:

هرگاه قاعده سیمپسون برای یک چند جمله ای از درجه سوم یا کمتر بکار ببریم مقدار دقیق انتگرال را تعیین می کند در این حالت با اختیار $۲n=۲$ داریم.

$$\int_{a}^{b}F(x)dx=\frac{b-a}{۶}\left[f(a)+۴f(\frac{a+b}{۲})+f(b)\right]$$

که به دستور منشور موسوم است.

مثال: با استفاده از دستور منشور $\int_{-۱}^{۳}x^{۳}du$ را محاسبه کنید و نتیجه را با نتیجه قضیه اساسی حساب دیفرانسیل انتگرال مقایسه کنید.

$$\int_{-۱}^{۳}x^{۳}du=\frac{۳-(-۱)}{۶}\left[(-۱)^{۳}+۴(\frac{۳+(-۱)}{۲})^{۳}+۳^{۳}\right]=\frac{۴}{۶}\left[-۱+۴+۲۷\right]=۲۰$$

با استفاده از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل انتگرال

$$\int_{-۱}^{۳}x^{۳}dx=\left[\frac{۱}{۴}x^{۴}\right]_{-۱}^{۳}=\frac{۱}{۴}\left[۳^{۴}-(-۱)^{۴}\right]=۲۰$$

فصل دوم

بردار

(مطالعه آزاد)

تعریف بردار: پاره خطی که دارای مقدار و جهت باشد را بردار گویند و طول بردار $\overrightarrow{AB}$ را با قدر مطلق $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ نشان می دهند.

تساوی دو بردار: دو بردار (همسنگ) گویند.هرگاه اندازه و جهت آنها یکی باشد. به عنوان مثال $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ همسنگ هستند.

اندازه یک بردار:

اندازه بردار $\vec{V} = (a_۱, a_۲)$ با استفاده از رابطه زیر بدست می آید.

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲}$$

جمع دو بردار:

الف) روش مثلثاتی(سر به ته): در این روش ابتدای بردار اول را به عنوان مبداء در نظر می گیریم و همسنگ آن بردار ها را رسم می کنیم.به عنوان مثال $\overrightarrow{AB}$ را رسم می کنیم سپس از انتهای بردار اول همسنگ بردار دوم ($\overrightarrow{CD}$) را رسم می کنیم ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می کنیم که جمع دو بردار است. برای برآیند بیش از دو بردار به روش ترسیمی می توان از این روش استفاده نمود.

$$\vec{V} = AE = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

ب) روش متوازی الاضلاع:

ابتدا نقطه ای را به عنوان مبداء در نظر می گیریم سپس همسنگ هر یک از بردارها را رسم می کنیم و با آنها تشکیل یک متوازی الاضلاع می دهیم که قطر متوازی الاضلاع جمع دو بردار است. از این روش برای جمع دو بردار استفاده می شود. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = a, \left|\overrightarrow{CD}\right| = b$

$$R = \left[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right] = \sqrt{a^۲ + b^۲ + ۲ab\cos\theta}$$

مثال: برآیند دو بردار $\vec{F_۱} = ۱۰N$ و $\vec{F_۲} = ۲۰N$ که با یکدیگر زاویه ۶۰^o ساخته اند را بدست آورید.

قضیه: $\left|\vec{F_۱} + \vec{F_۲}\right| = \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲ + ۲F_۱F_۱COS\theta} = \sqrt{۱۰^۲ + ۲۰۰ + ۲ \times ۱۰ \times ۲۰ \times \frac{۱}{۲}} = \sqrt{۷۰۰} = ۳۶/۴۵N$

اگر $\vec{V}_۱ = (a_۱, a_۲), V_۲ = (b_۱, b_۲)$ دو بردار باشند آنگاه مجموع $\vec{V_۱} + \vec{V_۲}$ برابر است:

$$\vec{V} + \vec{V}_۲ = (a_۱ + b_۲, a_۲ + b_۲)$$

$$\left|\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}\right| = \sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}$$

مثال: برآیند دو بردار به مختصات $\overrightarrow{A}=(3,6)$ و $\overrightarrow{B}=(3,2)$ را بدست آورید.

$$\left|\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right| = \sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} = \sqrt{(3+3)^2+(6+2)^2} = 10$$

بردار صفر: اگر طول یک بردار برابر صفر باشد یعنی $|V|=0$ در این صورت بردار $\overrightarrow{V}$ را بـردار صـفر گوینـد و بـا $\overrightarrow{O}$ نشان می دهیم.

ضرب عدد در یک بردار:

فرض کنید $\overrightarrow{V}$ یک بردار دلخواه که در عدد k ضرب شود در این صورت مقدار بردار $k\cdot\overrightarrow{V}$ برابـر مـی شـود. و اگـر $k\rangle 0$ باشد جهت بردار تغییر نمی کند و در صورتی که $k<0$ باشد جهت بردار $\overrightarrow{V}$ برعکس می شود.

قرینه یک بردار:

اگر $\overrightarrow{V}=(a_1,a_2)$ یک بردار باشد آنگاه بردار $(-a_1,-a_2)$ را قرینه بردار $\overrightarrow{V}$ گویند و با $-\overrightarrow{V}$ نشان می دهیم.

تفاضل دو بردار:

در صورتی که مختصات بردارهای $\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}$ مشخص شده باشد. یعنی $\overrightarrow{V_1}=(a_1,a_2)$ و $\overrightarrow{V_2}=(b_1,b_2)$ باشـد در این صورت مختصات تفاضل دو بردار به صورت $\overrightarrow{V_2}-\overrightarrow{V_1}=(b_2-a_2,b_1-a_1)$ محاسبه مـی شـود کـه طـول تفاضل دو بردار را نیز می توان به صورت زیر بدست آورد. $\left|\overrightarrow{V_2}-\overrightarrow{V_1}\right|=\sqrt{(b_2-a_2)^2+(b_1-a_1)^2}$

مثال: تفاضل دو بردار $V_2=(3,1), V_1=(6,5)$ را به دست آورید.

$$|V_2-V_1| = \sqrt{(b_2-a_2)^2+(b_1-a_1)^2} = \sqrt{(3-6)^2+(1-5)^2} = 5$$

تفاضل دو بردار به روش متوازی الاضلاع:

مانند جمع دو بردار عمل می کنیم با ایـن تفـاوت کـه بـردار بـا علامـت منفـی قرینـه اش را رسـم مـی کنـیم.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=a, \left|\overrightarrow{CD}\right|=b$$

$$\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

مثال: تفاضل دو بردار $F_2=10N, F_1=20N$ که با یکدیگر زاویه 60° ساخته اند را بدست آورید

$$\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right| = \sqrt{F_1^2+F_2^2-2F_1F_1\mathrm{COS}\theta} = \sqrt{10^2+20^2-2\times10\times20\times\frac{1}{2}} = \sqrt{300} = 17/3N$$

قضیه:

اگر $\overrightarrow{W},\overrightarrow{V},\overrightarrow{U}$ بردارهایی در V_2 بوده و d,c اعداد حقیقی باشند آنگاه جمع برداری و ضرب اسـکالربردارها دارای خواص زیراند.

۱) قانون جابجایی جمع $\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}=\overrightarrow{V}+\overrightarrow{U}$

۲) قانون شرکت پذیری $U+(\overrightarrow{V}+\overrightarrow{W})=(\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V})+\overrightarrow{W}$

۳) قانون بردار همانی نسبت به عمل جمع $\overrightarrow{Q}+\overrightarrow{V}=\overrightarrow{V}+\overrightarrow{O}=V$

۴) وجود بردار قرینه نسبت به عمل جمع $\vec{V}+(-\vec{V})=O$

۵) قانون شرکت پذیری نسبت اسکالر $(CD)\vec{V}=C(d\vec{V})$

۶)قانون پخش پذیری ضرب اسکالر $(C+d)\vec{U}=C\vec{U}+d\vec{U}$

۷) قانون پخش پذیری اسکالر $C(\vec{U}+\vec{V})=C\vec{U}+C\vec{V}$

۸) وجود همانی نسبت به ضرب اسکالر $۱\vec{U}=\vec{U}$

تعریف فضای برداری حقیقی:

معنای برداری حقیقی V مجموعه ای است از بردارها همراه با مجموعه اعداد حقیقی با دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر، به گونه ای که هر جفت بردار $\vec{V},\vec{U}$ در V و هر اسکالر C بردارهای $\vec{U}-\vec{V}$ و $C\vec{U}$ طوری تعریف شده باشند که در خواص (۱) تا (۴) بالا صدق کنند.

بردار یکه و پایه فضای برداری:

بردار یکه در محور Xها $\overrightarrow{i}=(۱,۰)$ و در محور yها $\vec{j}=(۰,۱)$ می باشد که نمایش برداری آن به صورت زیر است.

بنابراین می توان بردار $\vec{V}$ را به صورت زیر نمایش داد.

$$V=(a_۱,a_۲)=a_۱(۱,۰)+a_۲(۰,۱)=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}$$

بنابراین $\vec{j},\vec{i}$ یک پایه برای فضای برداری $V_۲$ را تشکیل می دهند تعداد عناصر پایه در یک فضای برداری را بعد فضای برداری گویند. بنابراین $V_۲$ یک فضای دو بعدی است.

مثال: بردار $v=(۶,-۲)$ را به صورت ترکیب خطی از بردارهای یک i و j بنویسید.

$$\vec{V}=(۶,-۲)=۶(۱,۰)+-۲(۰,۱)=۶i-۲j$$

نکته: جمع و تفریق و ضرب اسکالر به صورت زیر انجام می شود.

$$\vec{U}+\vec{V}=(a_۱i+a_۲j)+(b_۱i+b_۲j)=(a_۱+b_۱)i+(a_۲+b_۲)j$$

$$\vec{U}-\vec{V}=(a_۱i+a_۲j)-(b_۱i+b_۲j)=(a_۱-a_۲)i+(b_۱+b_۲)j$$

$$C\vec{U}=C(a_۱i+a_۲j)=($$

فرض کنید $U=۵\overrightarrow{i}+\overrightarrow{۶j}$, $V=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{۳j}$ $C=۳$ باشد بردارهای $\vec{U}+\vec{V}, \left|\vec{U}+\vec{V}\right|, \vec{U}-\vec{V}$ و CV را بدست آورید.

$$\vec{U}+\vec{V}=(۵+(-۱))\overrightarrow{i}+(۶+(-۳)\vec{j}=۴\overrightarrow{i}+۳\vec{j}$$

$$\left|\vec{U}+\vec{V}\right|=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵$$

$$\vec{U}-\vec{V}=(۵-(-۱))\overrightarrow{i}+(۶-(-۳))\overrightarrow{j}=۶\overrightarrow{i}+۹\vec{j}$$

$$۳V=۳(-\overrightarrow{i}-\overrightarrow{۳j})=-۳i-۹j$$

موازی بودن بردارها:

دو بردار ناصفر $\vec{V},\vec{U}$ را موازی نامند در صورتی که اسکالر c وجود داشته باشد $\vec{V}=C\vec{U}$ باشد

مثال: آیا دو بردار $U=۵i-۲j$ و $V=-۱i+۴j$ موازی یکدیگرند.

$$\vec{V}=C\vec{U}\Rightarrow\vec{V}=(-۱i+۴j)=-۲(۵i-۲j)\Rightarrow\vec{V}=-۲\vec{U}$$

بنابر این موازی هستند.

قضیه:

اگر $\vec{V}$ بردار ناصفری باشند. آنگاه $\vec{U}=\frac{۱}{|\vec{V}|}\vec{V}$ برداریکه (واحد هم جهت) با $\vec{V}$ است.

مثال: بردار یکه هم جهت با بردار $V=-۶i+۸j$ را تعیین کنید.

$$|v|=\sqrt{(-۶)^{۲}+۸^{۲}}=۱۰$$

$$\vec{U}=\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}=\frac{-۶i+۸j}{۱۰}=\frac{-۶}{۱۰}i+\frac{۸}{۱۰}j$$

ضرب عددی (اسکالر) دو بردار: به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vec{U}.\vec{V}=|\vec{U}||\vec{V}|\cos\theta$$

$$\vec{i}.\vec{i}=|\vec{i}||\vec{i}|\cos ۰^{\circ}=۱\times۱\times۱=۱ \qquad \vec{j}.\vec{j}=۱$$

بنابراین

$$\vec{i}.\vec{j}=|\vec{i}||\vec{j}|\cos ۹۰^{\circ}=۱\times۱\times۰=۰ \qquad \vec{j}.\vec{i}=۰$$

بنابراین ضرب دو بردار $\vec{U}.\vec{V}$ را می توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\vec{U}.\vec{V}=(a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}).(b_۱\vec{i}+b_۲\vec{j})=a_۱b_۱+a_۲b_۲$$

به این ضرب، ضرب داخلی یا ضرب نقطه ای نیز گویند. این ضرب خاصیت جابجایی دارد . $\vec{U}.\vec{V}=\vec{V}.\vec{U}$

مثال: ضرب نقطه ای در بردار $\vec{V}=(-۴,۳), U=(۲,۶)$ را بدست آورید.

$$\vec{U}.\vec{V}=(۲\times-۴)+(۶\times۳)=+۴$$

تعیین زاویه بین دو بردار: طبق تعریف ضرب داخلی دو بردار

$$\vec{U}.\vec{V}=|\vec{U}||V|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{U}.\vec{V}}{|\vec{U}||\vec{V}|}$$

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{V}=\vec{۴}i-\vec{۳}j, \vec{U}=\vec{۳}i+\vec{۴}j$ را تعیین کنید.

$$|\vec{U}|=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}=۵, |\vec{V}|=\sqrt{۴^{۲}+(-۳)^{۲}}=۵$$

$$\vec{U}.\vec{V}=۴\times۳+(-۳)(۴)=۰$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{U}.\vec{V}}{|\vec{V}||\vec{V}|}=\frac{۰}{۵\times۵}=۰\Rightarrow\theta=۹۰^{\circ}$$

بنابراین می توان گفت اگر ضرب داخلی دو بردار برابر صفر باشد دو بردار بر هم عمودند.

تصویربرداری $\vec{V}$ روی بردار $\vec{U}$:

اگر $\vec{U}$ بردار ناصفر باشد. تصویر برداری $\vec{V}$ روی $\vec{U}$ را با نماد $proj_{\vec{U}}^{\vec{V}}$ نشان می دهیم و از رابطه زیر بدست می آید.

$$proj_{\vec{U}}^{\vec{V}} = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{|\vec{U}|^۲}\vec{U}$$

و تصویر اسکالر بردار $\vec{V}$ رو بردار $\vec{U}$ از رابطه $|V|\cos\theta$ بدست می آید.

مثال: فرض کنید $\vec{V} = ۲\vec{i} - ۵\vec{j}, \vec{U} = ۳\vec{i} + ۴\vec{j}$ باشد.

الف) تصویر برداری $\vec{V}$ رو بردار $\vec{U}$ را بدست آورید.

ب) تصویر اسکالر $\vec{V}$ روی $\vec{U}$ را بدست آورید.

الف) $$proj_{\vec{U}}^{\vec{V}} = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{|\vec{U}|^۲}\vec{U} = \frac{۳\times۲+(۴)\times(-۵)}{۳^۲+۴^۲}(\vec{۳i}+\vec{۴j}) = \frac{-۱۴}{۲۵}((\vec{۳i}+\vec{۴j})$$

$$= \frac{-۴۲}{۲۵}\vec{i} - \frac{۶۴}{۲۵}\vec{j}$$

ب)

تصویر اسکالر $\vec{V}$ رو بردار $\vec{U}$ = $$|V|\cos\theta = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{|\vec{U}|} = \frac{۳\times۲+(۴)(-۵)}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}} = \frac{-۱۴}{۵} = -۲/۸$$

نمایش بردارها در فضای سه بعدی:

بردار $\vec{V}$ را در فضای سه بعدی به صورت $\vec{V} = a_۱\vec{i} + a_۲\vec{j} + a_۳\vec{k}$ نمایش می دهیم که $\vec{k} = (۰,۰,۱), \vec{j} = (۰,۱,۰).\vec{i} = (۱,۰,۰)$ بردارهای یکه می باشند و طول بردار $\vec{U}$ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$|\vec{V}| = \sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲}$$

زوایای هادی:

زوایایی که بردار ناصفر $\vec{V}$ به ترتیب با جهت مثبت محورهای z,y,x با α وβوγ نمایش می دهیم $\cos\gamma, \cos\beta, \cos\alpha$ را کسینوسهای هادی بردار $\vec{V}$ می نامیم و به صورت زیر محاسبه می شود

$$\cos\alpha = \frac{a_۱}{|\vec{V}|}, \cos\beta = \frac{a_۲}{|\vec{V}|}, \cos\gamma = \frac{a_۳}{|\vec{V}|}$$

نکته: رابطه بین کسینوسهای هادی به صورت $\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱$ می باشد.

مثال: اندازه و کسینوسهای هادی بردار $\vec{V} = ۲\sqrt{۳}\vec{i} + \vec{۲j} - \vec{۳k}$ را بدست آورید.

$$|\vec{V}| = \sqrt{(۲\sqrt{۳}^۲ + ۲^۲ + (-۳)^۲} = ۵$$

$$\cos\alpha = \frac{a_۱}{|\vec{V}|} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۵} \qquad \cos\beta = \frac{a_۲}{|\vec{V}|} = \frac{۲}{۵} \qquad \cos\gamma = \frac{a_۳}{|\vec{V}|} = \frac{-۳}{۵}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{V}|} = \frac{-3}{5}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{V}|} = \frac{2}{5}$$

محاسبه بردار یکه هم جهت $\vec{V}$:

اگر بردار یکه هم جهت با $\vec{V}$ با حرف $\vec{U}$ نشان دهیم

$$\vec{U} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{|\vec{V}|}(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \Rightarrow \vec{U} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$$

مثال: نقاط $B = (2,3,4), A = (3,2,1)$ را در نظر بگیرید بردار یکه هم جهت با بردار $\overrightarrow{AB}$ را به دست آورید.

$$\overrightarrow{AB} = (2,3,4) - (3,2,1) = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

$$\vec{U} = \frac{1}{|\overrightarrow{Ab}|}\overrightarrow{AB} = \frac{-1}{\sqrt{11}}i + \frac{1}{\sqrt{11}}j + \frac{3}{\sqrt{11}}\vec{k}$$

تعریف زیر فضا: هرگاه یکی از ضرائب بردار $\vec{V} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ برابر شود یک فضای دو بعدی حاصل می شود زیر فضای سه بعدی است به عنوان مثال اگر $a_2 = 0$ باشد آنگاه $\vec{V} = a_1\vec{i} + 0\vec{j} + a_3\vec{k}$ یک زیر فضای سه بعدی است.

ضرب برداری دو بردار:

ضرب برداری(خارجی) دو بردار به صورت $\vec{U} \times \vec{V} = |\vec{U}||\vec{V}|\sin\theta$ تعریف می شود اگر بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ به صورت یکای واحد نمایش داده شوند یعنی $\vec{U} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ و $\vec{V} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ در این صورت ضرب خارجی دو بردار را می توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\vec{U} \times \vec{V} = (a_2b_2 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)$$

برای سهولت در یادگیری می توان از طریق محاسبه در ترمینال زیر ضرب خارجی (برداری) محاسبه کرد.

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \vec{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \vec{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

مثال: فرض کنید $V = (2,3,-1), U = (-2,-1,3)$ باشد در این صورت حاصل ضرب برداری $\vec{U} \times \vec{V}$ را محاسبه کنید.

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

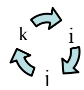
$$\vec{U} \times \vec{V} = -5\vec{i} - 7\vec{j} - 1\vec{k}$$

قضیه: اگر $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ بردارهای یکه $V_۳$ باشند آنگاه

الف) $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=۰$

ب) $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

ج) $j\times i=-k\quad k\times j=-i\quad i\times k=-j$

برای سهولت در به خاطر سپردن قضیه بالا ترتیب  را به خاطر می سپاریم اگر ضرب دو بردار یکه متوالی در جهت فلش نباشد جواب بردار سوم با علامت + است و اگر در خلاف جهت باشد بردار سوم با علامت منفی است به عنوان مثال $k\times j=-i\quad i\times j=k$

نکته۱: ضرب برداری دو بردار دارای خاصیت جابجایی نمی باشد. یعنی $\vec{U}\times\vec{V}=-\vec{V}\times\vec{U}$

نکته۲: مساحت مثلث ABC به راسهای $C=(-۱,۲,۴),B=(۳,۰,۴),A=(۲,-۱,۳)$ را بدست آورید.

$$\overrightarrow{AB}=(۳,۰,۴)-(۲,-۱,۳)=(-۱,+۱,۱)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-۱,۲,۴)-(۲,-۱,۳)=(-۳,۳,۱)$$

$$\overrightarrow{AB}\times AC=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ -۳ & ۳ & ۱ \end{vmatrix}=\vec{i}(۱-۳)-\vec{j}(۱-(-۳))+\vec{k}(۳-(-۳))=-۲i-۴j+۶k$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-۲)^{۲}+(-۴)^{۲}+۶^{۲}}=\sqrt{۵۶}\Rightarrow S=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times AC\right|}{۲}=\frac{\sqrt{۵۶}}{۲}$$

نکته۳: حجم متوازی السطوح به اضلاع AB,AC,AD را می توان از رابطه زیر بدست آورد

$$V=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})$$

مثال: حجم متوازی السطوح به ABCDA را که مختصات رئوس آن $D(۳,-۱,۲),C(۴,۱,-۱),B(۱,۳,۲),A(۲,۵,۳)$ می باشد را بدست آورید.

$$\overrightarrow{AB}=(۱,۳,۲)-(۲,۵,۳)=(-۱,-۲,-۱)$$

$$\overrightarrow{AC}=(۴,۱,-۱)-(۲,۵,۳)=(۲,-۴,-۴)$$

$$\overrightarrow{AD}=(۳,-۱,۲)-(۲,۵,۳)=(-۱,-۶,-۱)$$

توجه: محاسبه ترمینال زیر در بخش بعدی توضیح داده می شود.

$$V=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix} -۱ & -۲ & -۱ \\ ۲ & -۴ & -۴ \\ -۱ & -۶ & -۱ \end{vmatrix}=(-۴-۸+۱۲)-(-۴-۲۴+۴)=۲۴\quad \text{واحد حجم}$$

بردارها در فضای n بعدی:

در صورتی که بیش از ۳ متغیر در مسئله وجود داشته باشد از بردارهایی با بعد بیشتر استفاده می شود.

N تایی مرتب:

فرض کنید n عدد صحیح مثبتی باشد.nتایی مرتب $(X_۱,X_۲,\ldots\ldots X_n)$ مجموعه ای از n عدد است که به ترتیب نوشته شده اند و اعداد حقیقی $X_n,\ldots\ldots,X_۲,X_۱$ را به ترتیب مولفه های اول تا n ام این nتایی مرتب

می خوانیم مجموعه nتایی هایی مرتب را با R^n نشان می دهیم. دو nتایی مرتب در صورتی که ۱ عدد نظیر به نظیر آنها با هم برابر باشد با هم برابر هستند.

تعریف: مجموعه تمام بردارهایی که به صورت $(X_۱,X_۲,......X_n)$ می باشند را V_n نشان می دهیم.

جمع و ضرب اسکالر بردارها:

برای جمع و تفریق مانند بردارهای ۳ بعدی اعداد نظیر به نظیر را با هم جمع یا تفریق می کنیم و برای ضرب اسکالر بردار، اسکالر را در تک، تک اعداد ضرب می کنیم.

اگر $\vec{U}=(a_۱,a_۲,......a_n)$ و $\vec{V}=(b_۱,b_۲,......b_n)$ و C عدد حقیقی (اسکالر) باشد.

$\vec{U}+\vec{V}=(a_۱+b_۱,a_۲+b_۲,.......,a_n+b_n)$

$C\vec{U}=(Ca_۱,Ca_۲,.......,C_na_n)$

مثال: اگر $U=(۲,۳,۵,۷)$, $\vec{V}=(-۱,۲,۴,۳)$, $C=(-۲)$ باشد $U+V$ و CU را بدست آورید.

$U+V=(۲,۳,۵,۷)+(-۱,۲,۴,۳)=(۱,۵,۹,۱۰)$

$CU=(-۲)(۲,۳,۵,۷)=(-۴,-۶,-۱۰,-۱۴)$

قضیه:

فرض کنید $\vec{W},\vec{V},\vec{U}$ سه بردار در V_n و k,C دو اسکالر (عدد حقیقی) باشند. در این صورت

الف) جمع بردارها خاصیت جابجایی دارد. $\vec{U}+\vec{V}=\vec{V}+\vec{U}$

ب) جمع بردارها خاصیت شرکت پذیری دارد $(\vec{U}+\vec{V})+\vec{W}=\vec{U}+(\vec{V}+\vec{W})$

پ) عمل جمع دارای عضو خنثی یعنی بردار صفر است $\vec{U}+۰=\vec{U}$

ت) برای هر بردار $\vec{U}$ بردار قرینه $-\vec{U}$ وجود دارد $\vec{U}+(-\vec{U})=۰$

ث) $C(\vec{U}+\vec{V})=C\vec{U}+\overrightarrow{CV}$

ج) $(CK)\vec{U}=C(K\vec{U})$

چ) $(C+K)\vec{U}=C\vec{U}+K\vec{U}$

ح)وجود همانی نسبت به ضرب اسکالر $\vec{U}=\vec{U}$

نکته: برای هر دو بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ رابطه زیر برقرار است. $|\vec{U}+\vec{V}|\le|\vec{U}|+|\vec{V}|$

فصل سوم

ماتریس و دترمینان

تعریف: هر آرایه ای از اعداد که دارای m سطر و n ستون باشد یک ماتریس $m\times n$ گویند. که نمـایش عمـومی چنین ماتریسی به صورت زیر است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲}\dots\dots a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\dots\dots a_{۲n} \\ a & \\ .a_{m۱} & a_{m۲}\dots\dots a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A=(aij)_{m\times n}$$

هر یک از اعداد aij را یک عنصر یا درآیه ماتریس می نامیم. که I اندیس سطر و j اندیس ستون است (به عنوان مثال $a_{۲۳}$ یعنی سطر دوم ستون سوم) که در این صورت مـاتریس A را بـه اختصـار بـا نمـاد $A=[aij]_{m\times n}$ نشان می دهیم.

برای مثال:

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۴ \\ -۵ & ۲ & ۰ \\ ۶ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}_{۳\times ۳} \qquad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۱\times ۴}$$

ماتریسA دارای ۳ سطر و ستون است و ماتریس B دارای یک سطر و چهار ستون است.

انواع ماتریسها:

الف) ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد را ماتریس سطری (بـردار سـطری) مـی نـامیم

مانند ماتریس B $\quad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۱\times ۴}$

که فرم کلی آنها به صورت $\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲}\dots\dots a_{۱n} \end{bmatrix}_{۱\times n}=(aij)_{۱\times n}$

می باشد به عبارتی در $A=(aij)_{m\times n}$ به جای m=۱ قرار می دهیم

ب) **ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط دارای یک ستون باشد ماتریس ستونی (بردار ستونی) می نـامیم کـه در فرم $A=(aij)_{m\times n}$ به جای n=۱ قرار می دهیم.

$$C=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ a_{m۱} \end{bmatrix}_{m\times ۱}=(aij)_{m\times ۱}$$

پ)**ماتریس صفر:** ماتریسـی کـه تمـام عناصـر آن صـفر باشـد را مـاتریس صـفر مـی نـامیم و بـه صـورت $A=۰_{m\times n}$ یا $A=۰$ صفر نمایش می دهیم.

$$B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times ۳} \qquad D=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}_{۳\times ۱}$$

ماتریس مربع: ماتریسی که درآن تعداد سطرها و ستونهای آن با هم برابر باشد یک ماتریس می نامیم به عبارتی در فرم $A=[aij]_{m\times n}$ یک ماتریس مربع است اگر و فقط اگر m=n باشد

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲}\ldots\ldots a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\ldots\ldots a_{۲n} \\ \\ a_{n۱} & a_{n۲}\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad F=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۳ \\ ۶ & ۳ & -۴ \end{bmatrix}_{۳\times ۳}$$

نکته: ماتریس مربع n×n را ماتریس مربع مرتبه n گویند. به عنوان مثال ماتریس F ماتریس مربع مرتبه۳ است در ماتریس مربع $A=[aij]_{m\times n}$ قطری که اندیس سطر و ستون آن برابر باشد را قطر اصلی گویند مانند درایه های $a_{۱۱}, a_{۲۲}, a_{۳۳}, \ldots\ldots, a_{nn}$

ماتریس واحد (همانی): ماتریس مربع $A=[aij]_{m\times n}$ را در صورتی که هر یک از عناصر روی قطر اصلی برابر با یک و سایر عناصر صفر باشد را همانی یا واحد گویند که با I_n نمایش می دهیم که n مرتبه ماتریس مربع است.

$$aij=\begin{cases} ۱ \\ ۰ \end{cases} \quad i=j, i\neq j$$

$$I_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad I_n=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \ldots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \ldots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \ldots & & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \ldots & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \ldots & & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری: ماتریسی که تمام عناصر خارج قطر اصلی آن صفر باشد را ماتریس قطری گویند.

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} , \qquad \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که تمام عناصر روی قطر اصلی آن برابر باشد را ماتریس اسکالر گویند. و مضربی از ماتریس واحد است یعنی هر ماتریس به صورت KI_n باشد ماتریس اسکالر است.

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}=۵I_۳ \qquad \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}=۲I_۲$$

ماتریس بالا مثلثی: ماتریس مربعی که تمام عناصر زیر قطر آن صفر باشد ماتریس بالامثلثی گویند. یعنی اگر $i\rangle j$ باشد $aij=۰$ است و سایر عناصر می تواند عدد یا صفر باشد. مانند

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس پائین مثلثی: ماتریس مربعی که تمام عناصر بالا قطر اصلی آن صفر باشد ماتریس پائین مثلثی گویند. یعنی اگر $i \langle j$ باشد. $aij=۰$ است و سایر عناصر می تواند عدد یا صفر باشد مانند

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۵ & ۲ & ۷ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس های واحد، قطری، اسکالر، صفر هم ماتریس بالا مثلثی و هم ماتریس پائین مثلثی هستند.

ماتریس متقارن: فرض کنید A یک ماتریس مربع از مرتبه n باشد در صورتیکه درایه های نسبت به قطر اصلی برابر باشد ماتریس را متقارن گویند به عبارتی اگر $aij=aji$ باشد ماتریس A را متقارن گویند.

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & ۵ \\ ۳ & -۱ & ۶ \\ ۵ & ۶ & ۷ \end{bmatrix}$$

ماتریس شبه متقارن (پادمتقارن): فرض کنید A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد. در صورتیکه کلیه عناصر قطر اصلی صفر باشد. و سایر عناصر نسبت به قطر قرینه باشد یعنی اگر $i=j$ باشد $aij=۰$ و اگر $i \neq j$ باشد $aij=-aji$ در این صورت ماتریس A شبه متقارن است.

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۴ \\ -۱ & -۴ & ۰ \end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد در ماتریس: فرض کنید k یک عدد اسکالر $A = (aij)_{m\times n}$ یک ماتریس باشد دراین صورت $kA = (kaij)_{m\times n}$ یعنی کلیه اعداد ماتریس در اسکالر ضرب می شود.

مثال: اگر $A = [۳,-۱,۴]$ باشد حاصل ۳A را بدست آورید.

$$۳A = ۳[۳,-۱,۴] = [۹,-۳,۱۲]$$

تساوی دو ماتریس: دو ماتریس AوB را مساوی گویند اگر و فقط اگر دو ماتریس هم مرتبه باشند و درایه های نظیر به نظیر آنها با هم برابر باشد (یعنی $aij=bij$)

مثال: مقدار xوy را طوری تعیین کنید که دو ماتریس AوB با هم برابر باشند.

$$A = \begin{bmatrix} ۳x & ۴ \\ -۸ & ۵ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۶ & ۴ \\ ۲y & ۵ \end{bmatrix}$$

$$۲x = ۶ \Rightarrow x = ۲, ۲y = -۸ \Rightarrow y = -۴$$

جمع دو ماتریس:

جمع دو ماتریس وقتی قابل تعریف است که دو ماتریس هم مرتبه باشند که در این صورت درایه های نظیر به نظیر با هم جمع می شوند و متبه ماتریس تغییر نمی کند به عنوان مثال اگر $A_{m\times n}$ و $B_{m\times n}$ در این صورت اگر $C=A+B$ باشد $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ -۱ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد حاصل جمع دو ماتریس را بدست آورید.

$$C = a + b \Rightarrow C = \begin{bmatrix} ۴ & +۲ & ۵ \\ -۱ & ۰ & ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۰ & ۸ \\ ۴ & ۶ & ۸ \end{bmatrix}$$

قرینه ماتریس: اگر $A = (aij)_{m\times n}$ ، ماتریس‌A- را قرینه ماتریس A می نامیم و با $-A = (-aij)_{m\times n}$ نشان می دهیم بنابراین $A - B = A + (-B)$

مثال:

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد حاصل $۲A - ۳B$ را بدست آورید.

$$۲A - ۳B = ۲\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} - ۳\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۸ \\ ۴ & -۲ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ & -۶ \\ -۹ & -۱۲ \\ +۳ & -۱۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۵ & -۱۴ \\ ۳ & -۱۱ \end{bmatrix}$$

قضیه:

اگر C,B,A سه ماتریس m×n و h,k دو عدد حقیقی باشند آنگاه:

جمع دو ماتریس خاصیت جابجایی دارد الف) A+B=B+A

خاصیت پخشی دارد. ب) A+(B+C)=(A+B)+C

پ) k+(A+B)= kA+kB

ت) (k+h)A= kA+hA

ضرب دو ماتریس:

دو ماتریس $A = (aij)_{m\times p}$ و $B = (bij)_{p\times n}$ را در نظر می گیریم حاصل ضرب دو ماتریس B,A ماتریسی است مانند C که با $C_{m\times n} = A_{m\times p}B_{p\times n}$ نشان می دهیم که دارای m سطر و n ستون است بنابر این برای ضرب دو ماتریس باید تعداد ستون ماتریس اول برابر تعداد سطر ماتریس دوم باشد. برای بدست آوردن درایه C_{ij} ماتریس C کافی است سطر i ام ماتریس A را در ستون j ام c ماتریس B ضرب کنیم و نظیر به نظیر با هم جمع کنیم $C_{ij} = \sum a_{ik}b_{kj} \quad , k=۱$

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۲} & .... & a_{۱p} \\ a_{i۱} & a_{i۲} & .... & a_{ip} \\ a_{m۱} & a_{m۲} & .... & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱j} & ...... & b_{۱n} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲j} & & b_{۲n} \\ & & & & \\ b_{p۱} & b_{p۲} & & & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{۱۱} & C_{۱۲} & ..... & C_{۱n} \\ C_{i۱} & C_{i۲} & C_{ij} & C_{in} \\ C_{m۱} & C_{m۲} & ..... & C_{mn} \end{bmatrix}$$

نکته: ضرب دو ماتریس در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد $AB \neq BA$

قضیه:

الف) $AI_n = A = I_nA$

ب) $A(BC) = (AB)C$

پ) $C(A + B) = CA + CB$

نکته: در حالت کلی در صورتی که AB=AC باشد نمی توان نتیجه گرفت B=C است.

مثال: حاصل ضرب ماتریس $A=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ -۱ & ۲\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$C=AB=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ -۱ & ۲\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}_{۳\times ۲}\times\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}_{۲\times ۲}=\begin{bmatrix}۳\times ۱+۴\times ۲ & ۳\times -۱+۴\times ۰\\ -۱\times ۱+۲\times ۲ & -۱\times ۱+۲\times ۰\\ ۲\times ۱+۰\times ۲ & ۲\times -۱+۰\times ۰\end{bmatrix}_{۳\times ۳}$$

$$C=\begin{bmatrix}۱۱ & -۳\\ ۳ & -۱\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}_{۳\times ۲}$$

نکته: در این مثال BA تعریف نشده اند چون تعداد ستون ماتریس اول برابر تعداد سطر ماتریس دوم نیست.

ترانهاده ماتریس:

اگر در ماتریس $A=(aij)_{m\times n}$ جای سطرها و ستونها را با هم عوض کنیم ماتریس حاصل را ترانهاده ی ماتریس می نامیم و با A^T یا A' نشان می دهیم به بیان دیگر $A^T=(bij)_{n\times m}$ که در آن $b_{ij}=a_{ji}$ می باشد.

مثال: ترانهاده ماتریس $A=\begin{bmatrix}۳ & ۴ & ۵\\ ۲ & -۱ & ۶\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$A^T=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۴ & -۱\\ ۵ & ۶\end{bmatrix}$$

قضیه:

اگر AوB دو ماتریس $m\times n$ و k عدد حقیقی باشد.

الف) $(A^T)^T=A$ یعنی ترانهاده ترانهاده ماتریس A با ماتریسA برابر است

ب) $(KA^T)^T=K(A)^T$ یعنی ترانهاده مضربی از یک ماتریس با همان مضرب ترانهاده ماتریس برابر است

پ) $(A+B)^T=A^T+B^T$ یعنی ترانهاده مجموع دو ماتریس برابر مجموع ترانهاده های دو ماتریس است

ت) $(AB)^T=B^TA^T$ یعنی ترانهاده ضرب دو ماتریس برابر حاصلضرب ترانهاده ماتریس دومی در ترانهاده ماتریس اولی و برای آنکه قابل تعریف باشد باید دو ماتریس مربع باشد.

نکته۱: در صورتی که ماتریس A متقارن باشد در این صورت $A^T=A$

نکته۲: در صورتی که ماتریس A شبه متقارن باشد در این صورت $A^T=-A$

ماتریس متعامد: در صورتی که حاصل ضرب ترانهاده یک ماتریس در خود ماتریس برابر ماتریس واحد شود ماتریس را متعامد گویند. یعنی $A^TA=AA^T=I_n$

و در صورتی امکان پذیر است که ماتریس A مربع باشد مانند ماتریس دوران

ماتریس دوران= $\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$

به عنوان مثال ماتریس های زیر متعامد هستند

$$A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$$

اثر ماتریس:(trac):

مجموع عناصر روی قطر اصلی را اثر ماتریس گویند و اثر ماتریس A را با $tr(A)$ نشان می دهیم

$$tr(A)=\sum_{i=۱}^{n} a_{ii}=a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳}+....a_{nn}$$

مثال: اثر ماتریس A را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}۶ & ۷ & ۲\\ ۴ & -۱ & ۳\\ ۳ & ۱ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow tr(A)=۶+(-۱)+۵=۱۰$$

خواص اثر ماتریس:

الف) $tr(kA)=ktr(A)$

ب) $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$

تعریف دترمینان:

تابعی است که هر ماتریس مربع را به یک عدد حقیقی نسبت می دهد و دترمینان ماتریس A را با $detA$ یا $|A|$ نشان می دهیم.

۱) دترمینان ماتریس ۱×۱ ماتریس ۱×۱ تنها دارای یک عدد است و دترمینان این نوع ماتریس همان عدد ماتریس است به عنوان مثال اگر $A=[۷]$ باشد در این صورت $detA=۷$ است.

۲) دترمینان ماتریس ۲×۲ حاصل ضرب عناصر قطر اصلی منهای حاصل ضرب عناصر قطر فرعی یعنی اگر $A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\end{bmatrix}$ باشد در این صورت دترمینان A به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\end{vmatrix}=a_{۱۱}a_{۲۲}-a_{۱۲}a_{۲۱}$$

مثال: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ ۵ & -۱\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$\det A=\begin{vmatrix}۳ & ۴\\ ۵ & -۱\end{vmatrix}=(۳\times(-۱))-(۵\times۴)=-۲۳$$

مینور یا کهاد:

ماتریسی که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس $A_{n\times n}$ بدست می آید و با M_{ij} نشان می دهیم ماتریس M_{ij} ماتریسی $(n-۱)\times(n-۱)$ است و دترمینان ماتریس M_{ij} را مینور یا کهاد عنصر a_{ij} در ماتریس A می نامیم.

مثال: مینور a_{23} را در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

برای محاسبه M_{23} سطر دوم و ستون سوم را حذف می کنیم . یعنی

$$a_{23}=|M_{23}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=(1\times 2)-(2\times 0)=2$$

همسازه یا کوفاکتور:

همسازه عنصر a_{ij} در ماتریس $A=[\ aij\ ]_{m\times n}$ را که عددی حقیقی است با A_{ij} نشان داده و به صـورت زیر تعریف می کنیم

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

مثال: کوفاکتور عنصر a_{23} را در مثال قبل بدست آورید.

$$A_{23}=(-1)^{2+3}|M_{23}|=-1\times 2=2$$

محاسبه دترمینان به روش بسط سطر i ام

از این روش برای محاسبه دترمینان ماتریسهای با مرتبه بالاتر از ۲×۲ استفاده می شود به صورت زیر تعریف می شود.

$$\det A=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}$$

لازم بـه توضـیح اسـت کـه ایـن اعمـال نسـبت بـه j ام نیـز مـی تـوان انجـام داد کـه در ایـن صـورت $\det A=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ بنابراین برای کمتر شدن محاسبات بهتر است سطر یا ستونی انتخاب شود کـه تعـداد صفر بیشتری باشد.

مثال: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

توجه: چون در سطر دوم صفر وجود دارد نسبت به سطر دوم بسط می دهیم

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}=(-1)^{2+1}\times 1\times\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\times 0\times\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\times 2\times\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=-1\times(2-12)+0+(-2)\times(9-8)=+10+(-2)=8$$

مثال: دترمینان ماتریس A را محاسبه کنید

توجه: چون ستون دوم دارای ۲ عدد صفر می باشد نسبت به ستون دوم بسط می دهیم $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A| = (-۱)^{۱+۲} \times ۳\begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ ۶ & ۱ \end{vmatrix} + (-۱)^{۲+۲} \times ۰ \times \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ ۶ & ۱ \end{vmatrix} + (-۱)^{۳+۲} \times ۰ \times \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} =$$

$$-۳ \times (۳ - ۳۰) + ۰ + ۰ = ۸۱$$

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۵ & ۶ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید. نسبت به سطر اول بسط می دهیم

$$|A| = \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۵ & ۶ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = (-۱)^{۱+۱} \times ۳ \times \begin{vmatrix} ۵ & ۶ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} + (-۱)^{۱+۲} \times ۲ \times \begin{vmatrix} -۱ & ۶ \\ ۴ & ۲ \end{vmatrix} + (-۱)^{۱+۳} \times ۱ \times \begin{vmatrix} -۱ & ۵ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۳ \times (۱۰ - ۶) + (-۲)(-۲ - ۲۰) + ۱ \times (-۱ - ۲۰) = ۱۲ + ۴۴ - ۲۱ = ۳۵$$

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس های ۳×۳:

از این دستور فقط برای محاسبه دترمینان ماتریس ها ۳×۳ استفاده می شود. در این روش دو ستون اول را کنار ماتریس نوشته سپس مجموع حاصل ضرب عناصر قطر اصلی را منهای مجموع حاصل ضرب عناصر قطر فرعی می کنیم.

مثال: دترمینان ماتریس A را محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۲ \\ ۲ & ۵ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} ۳ & ۴ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۱ & ۲ & ۵ \\ -۱ & ۲ & ۶ & -۱ & ۲ \end{array}\right| = (۳ \times ۵ \times ۶ + ۴ \times ۱ \times (-۱) + ۲ \times ۲ \times ۲) - (۴ \times ۲ \times ۶ + ۳ \times ۱ \times ۲ + ۲ \times ۵ \times (-۱))$$

$$= (۹۰ - ۴ + ۸) - (۴۸ + ۶ - ۱۰) = ۹۴ - ۵۴ = ۴۰$$

نکته۱) اگر در یک ماتریس یک سطر یا یک ستون مضرب یک سطر یا یک ستون دیگر باشد دترمینان ماتریس صفر است.

نکته۲) در صورتی در یک ماتریس یک سطر یا یک ستون برابر یک سطر یا یک ستون دیگر باشد دترمینان صفر است.

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ & ۵ & ۲ \\ -۴ & -۳ & -۵ & -۲ \\ ۷ & ۸ & ۲ & ۹ \\ ۶ & ۴ & ۳ & ۱۰ \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

جواب: چون سطر دوم (۱-) برابر سطر اول است بنابراین $|A| = ۰$ است

نکته۳) اگر یک سطر یا یک ستون ماتریس صفر باشد دترمینان ماتریس صفر می شود.

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۷ \\ ۲ & ۰ & ۱۰ \\ ۶ & ۰ & ۹ \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

جواب: چون ستون دوم صفر است بنابراین $|A| = ۰$ است.

۴)اگر ماتریس A در عدد K ضرب شود دترمینان K^n برابر می شود $|kA| = k^n|A|$

مثال: اگر ماتریس A مرتبه ۴ و $|A| = ۸$ باشد دترمینان $۳A$ را بدست آورید.

$$|kA| = k^n|A| = ۳^۴ \times ۸ = ۶۴۸$$

۵)اگر یک سطر یا ستون ماتریس A را عدد K ضرب کنیم دترمینان ماتریس K برابر می شود

مثال: اگر ماتریس A مرتبه۵ و$|A| = ۱۲$ باشد در صورتیکه سطر سوم را در عدد ۵ ضرب کنیم دترمینان ماتریس جدید را محاسبه کنید. **جواب:** $k|A| = ۵ \times ۱۲ = ۶۰$

۶) اگر در یک ماتریس جای دو سطریا جای دو ستون عوض شود علامت دترمینان عوض می شود.

۷) اگر مضربی از یک سطر یا یک ستون را به سطر یا ستون دیگر اضافه کنیم تاثیری در مقدار دترمینان ندارد. از خاصیت برای آن استفاده می شود در سطر یا ستون صفر بدست آوریم تا محاسبه دترمینان ساده تر شود.

۸) دترمینان ماتریس های مثلثی و قطری برابر حاصل ضرب عناصر روی قطر اصلی می باشد.

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۷ & ۹ \\ ۰ & ۵ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

جواب: چون ماتریس مثلثی است دترمینان برابر حاصل ضرب عناصر روی قطر اصلی است.

$$|A| = ۲ \times ۵ \times ۸ = ۸۰$$

۹) اگر AوB دو ماتریس مربع هم مرتبه باشند. $|AB| = |A||B|$

۱۰) دترمینان ماتریس واحد برابر یک است $|I| = ۱$

۱۱) دترمینان ماتریس A و ترانهاده ماتریس A با هم برابر است $|A^T| = A$

۱۲) دترمینان ماتریس های متعامد برابر ± ۱ است

مثال: دترمینان ماتریس های زیر را بدست آورید چون هر دو ماتریس متعامد هستند بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} = +۱ \qquad ,B = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{۱}{)۶} & \frac{-۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{-۲}{\sqrt{۶}} & ۰ \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{۱}{\sqrt{۶}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix} = ۱$$

وارون ماتریس:

ماتریس مربع $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را وارون پذیر می نامیم اگر ماتریسی مانند $B = (b_{ij})_{n\times n}$ وجود داشته باشد بـه طوری که $AB = BA = I_n$ در این صورت ماتریس B وارون ماتریس A است که با $A^{-۱}$ نمـایش مـی دهـیم.

وارون ماتریس در صورت وجود منحصر به فرد است.

نکته: در صورتی که $|A| = ۰$ باشد ماتریس وارون پذیر نیست.

تعریف ماتریس الحاقی:

ترانهاده ماتریس همسازه های ماتریس مربع A را ماتریس الحاقی A نامیده و با $adjA$ نشان مـی دهـیم. یعنـی $adjA=(A_{ij})^T$

محاسبه وارون ماتریس:

وارون ماتریس را به دو روش به دست می آوریم

الف) با استفاده از ماتریس الحاقی اگر $|A|\neq ۰$ باشد در این صورت وارون ماتریس با استفاده از رابطه زیر بدسـت می آید . $A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}adjA$

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ را با استفاده ماتریس الحاقی بدست آورید.

$$|A|=\left|\begin{matrix} ۳ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۳ \end{matrix}\right|\begin{matrix} ۳ & ۱ \\ ۳ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{matrix}\Bigg|=(۳\times۳\times۳+۱\times۱\times۲+۳\times۳\times۰)-(۱\times۳\times۳+۳\times۱\times۰+۳\times۳\times۲)=۲$$

$$a_{۱۱}=(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix}=۹ \qquad a_{۱۲}=(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}=-۷ \qquad a_{۱۳}=(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۳ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix}=-۶$$

$$a_{۲۱}=(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix}=-۳ \qquad a_{۲۲}=(-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۳ & ۳ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}=۳ \qquad a_{۲۳}=(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix}=+۲$$

$$a_{۳۱}=(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}=-۸ \qquad a_{۳۲}=(-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۳ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}=+۶ \qquad a_{۳۳}=(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۳ & ۳ \end{vmatrix}=۶$$

$$A_{ij}=\begin{bmatrix} ۹ & -۷ & -۶ \\ -۳ & ۳ & ۲ \\ -۸ & ۶ & ۶ \end{bmatrix} \qquad adjA=(Aij)^T=\begin{bmatrix} ۹ & -۳ & -۸ \\ -۷ & ۳ & ۶ \\ -۶ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|} \quad adjA=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۹ & -۳ & -۸ \\ -۷ & ۳ & ۶ \\ -۶ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۹}{۲} & -\frac{۳}{۲} & -۴ \\ -\frac{۷}{۲} & \frac{۳}{۲} & ۳ \\ -۳ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

نکته: برای محاسبه وارون ماتریس های ۲×۲ کافی است جای عناصر قطر اصلی را عوض کنیم و قطر فرعی را در (۱-) ضرب کنیم تا ماتریس الحاقی بدست آید سپس تقسیم بر دترمینان ماتریس می کنیم به عبارتی اگر مـاتریس A بـه صـورت $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشـد . $adjA=\begin{bmatrix} d & -d \\ -c & a \end{bmatrix}$, $A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -d \\ -c & a \end{bmatrix}$ میباشد.

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید

$$|A| = (6\times 4) - (3\times 2) = 18$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

ب) محاسبه وارون ماتریس با استفاده از اعمال سطری مقدماتی

در صورتی که ماتریس A وارون پذیر باشد ($|A| \neq 0$) به وسیله یک سری اعمال سطری مقدماتی تبدیل به ماتریس واحد می شود آنگاه با انجام همین اعمال سطری مقدماتی بر روی ماتریس واحد وارون ماتریس A بدست می آید. جهت بدست آوردن وارون ماتریس A ابتدا ماتریس A را به صورت $[A|\ I]$ می نویسیم یعنی ماتریس واحد را کنار ماتریس می نویسیم سپس a_{11} را به یک تبدیل می کنیم سپس با اعمال سطری عناصر ستون اول را به صفر تبدیل می کنیم سپس a_{22} را در ماتریس جدید به یک تبدیل می کنیم سپس اعداد ستون دوم زیر a_{22} را به صفر تبدیل می کنیم الی آخر سپس a_{nn} را به یک تبدیل می کنیم و توسط آن با اعمال سطری مقدماتی اعداد بالا a_{nn} را به صفر تبدیل می کنیم و توسط $a_{(n-1)(n-1)}$ اعداد بالای آن را به صفر تبدیل می کنیم و الی آخر که در این صورت ماتریس A به ماتریس واحد تبدیل می شود و فرم کلی $[I|\ B]$ تبدیل می شود که B وارون ماتریس A است نمایش اعمال سطری مقدماتی به صورت زیر است.

۱) تعویض جای دو سطر $R_i \leftrightarrows R_j$

۲) ضرب یک سطر در عدد غیر صفر $kR_i \to R_i$

۳) اضافه کردن مضربی از یک سطر به سطر دیگر $kR_i + R_j \to R_j$

مثال: وارون ماتریس زیر را به روش اعمال سطری مقدماتی بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrows R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & +4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{R_3}{3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{+4}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۱-۲R_۲}\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & -\frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{۷}{۳} \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۱}{۳} & \frac{-۲}{۳} & \frac{۴}{۳} \end{array}\right]$$

بنابراین

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} -\frac{۲}{۳} & -\frac{۲}{۳} & \frac{۷}{۳} \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳} & \frac{۴}{۳} \end{bmatrix}$$

قضیه:

اگر A,B دو ماتریس $n\times n$ و وارون پذیر باشند، آنگاه:

۱) ماتریس حاصل ضرب AB وارون پذیر است. $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$

۲) ماتریس ترانهای A وارون پذیر است . $(A^T)^{-۱}=(A^{-۱})^T$

۳) وارون، وارون ماتریس A برابر ماتریس A است $(A^{-۱})^{-۱}=A$

۴) دترمینان وارون ماتریسA برابر معکوس دترمینان ماتریس A است $A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}$

نکته: در ماتریس متعامد A وارون ماتریس و ترانهاده با هم برابرند $A^{-۱}=A^T$

فصل چهارم

دستگاه معادلات خطی و توابع خطی

دستگاه معادلات خطی:

یک معادله به صورت $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots\dots + a_nx_n = 0$ را معادله خطیn مجهولی گویند. که هر n تایی مرتب $(x_1, x_2, \dots\dots, x_n)$ از اعداد حقیقی را که در این معادله صدق کند یک جواب آن می نامیم و m معادله خطی n مجهولی را دستگاه m معادله n مجهولی گویند. و به صورت زیر

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$
دستگاه mمعادله خطی n مجهولی

در این دستگاه n تایی $(a_1, a_2, \dots\dots, a_n)$ از اعداد حقیقی را که در تمام معادله های دستگاه صدق کند. یک جواب دستگاه می نامیم. این دستگاه را می توانیم به صورت معادله ماتریسی زیر بنویسیم.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots\dots & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2}\dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$

معادله ماتریسی را به صورت خلاصه $AX=B$ نمایش می دهیم. که در آن $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ماتریس ضرایب و $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \\ X_n \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات و $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{bmatrix}$ ماتریس اعداد ثابت است

مثال: دستگاه $\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{array}\right.$ را به فرم ماتریسی نمایش دهید.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

نکته: یک دستگاه معادلات خطی ممکن است دارای یک جواب منحصربه فرد یا بینهایت جواب باشد و یا اصلا جوابی نداشته باشد.

روشهای حل یک دستگاه معادلات خطی

۱- روش حذف گاوس:

در این روش با بکارگیری اعمال سطری مقدماتی روی سطرهای ماتریس مرکب $[A\ |B]$ دستگاه $AX=B$ را حل می کنیم.

مثال: دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x+y+z=۱ \\ ۲x-y+z=۵ \\ x-y-z=-۱ \end{cases}$$

$$[A\ |B]=\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۱ & ۵ \\ ۱ & -۱ & -۱ & -۱ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۲-۲R_۱\to R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۳ & -۱ & ۳ \\ ۱ & -۱ & -۱ & -۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۳-R_۱\to R_۳} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۳ & -۱ & ۳ \\ ۰ & -۲ & -۲ & -۲ \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-R_۲}{۳}\to R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۳} & -۱ \\ ۰ & -۲ & -۲ & -۲ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۳+۲R_۲\to R_۳} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۳} & -۱ \\ ۰ & ۰ & -\frac{۴}{۳} & -۴ \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{۴}{۳}R_۳\to R_۳} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۳} & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & +۳ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲-\frac{R_۳}{۳}} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & +۳ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۱-R_۳\to R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & +۳ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۱-R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & +۳ \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ y=-۲ \\ Z=+۳ \end{cases}$$

مجهول آزاد: در صورتی که با حل دستگاه جواب به گونه ای بدست آید که بتوان مجهولات را بر حسب یکی از مجهولات نوشت آن مجهول را مجهول آزاد گویند.

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} X_۱-۲X_۲-۳X_۳=۲ \\ X_۱-۴X_۲-۱۳X_۳=۱۴ \\ -۳X_۱+۵X_۲+۴X_۳=۰ \end{cases}$$

$$[A|\ B]=\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & -۳ & ۲ \\ ۱ & -۴ & -۱۳ & ۱۴ \\ -۳ & +۵ & +۴ & ۰ \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & -۳ & ۲ \\ ۰ & -۲ & -۱۰ & ۱۲ \\ ۰ & -۱ & -۵ & ۶ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{۲R_۳-R_۲\to R_۳} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & -۳ & ۲ \\ ۰ & -۲ & -۱۰ & ۱۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-۱}{۳}R_۲\to R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & -۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۵ & -۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_3+R_2\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&7&-10\\0&1&5&-6\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x_1+7x_3=10\Rightarrow x_1=10-7x_3\\x_2+5x_3=-6\Rightarrow x_2=-6-5x_3\end{cases}$$

اگر $X_3=a$ را به عنوان مجهول آزاد در نظر بگیریم جوابهای معادله به صورت زیر است به عبارتی جواب مجهولات وابسته به یکدیگر هستند.

$$\begin{cases}x_1=10-7a\\x_2=-6-5a\\x_3=a\end{cases}$$

چون a هر عدد دلخواهی می تواند باشد بنابراین دستگاه بینهایت جواب دارد.

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید

$$\begin{cases}X_1+X_2+2X_3=5\\2X_1+3X_2-X_3=2\\-3X_1+5X_2+3X_3=7\end{cases}$$

$$[A|\ B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&5\\2&3&-1&2\\4&5&3&7\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-4R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&5\\0&1&-5&-8\\0&1&-5&-3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3-R_2\to R_3]{R_1-R_2\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&7&13\\0&-10&-5&-8\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x_1+7x_3=113\\x_2-5x_3=-8\\0=-5\end{cases}$$

معادله سوم این دستگاه غیر ممکن است زیرا $-5\neq0$ سپس دستگاه داده شده جوابی ندارد بنابراین برای جوابهای یک دستگاه ۳ حالت مختلف امکان دارد رخ دهد.

الف) جواب منحصر به فرد بدست آید که این وضعیت در حالتی است که دترمینان ماتریس ضرائب مخالف صفر باشد.

ب) بیشمار جواب داشته باشد در صورتی است که مجهولات به یکدیگر وابسته باشند

پ) دستگاه جوابی نداشته باشد.

۲- روش وارون ماتریس:

در صورتی که تعداد مجهولات با تعداد معادلات یک دستگاه معادلات خطی برابر باشد (دستگاه n معادله n مجهولی) و ماتریس ضرائب دستگاه وارون پذیر باشد (دترمینان ماتریس ضرائب مخالف صفر باشد) آنگاه دستگاه همواره دارای یک جواب منحصر به فرد است بنابراین برای بدست آوردن مجهولات کافی است از سمت چپ فرم ماتریسی دستگاه را در وارون ماتریس ضرب کنیم تا مجهولات بدست آید.

$$AX=B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

مثال: دستگاه زیر را به روش وارون ماتریس حل کنید.

$$\begin{cases}3x-1y=1\\5x+2y=9\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}3&-1\\5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\9\end{bmatrix}\qquad |A|=(3\times2)-(-1\times5)=+14$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A=+\frac{1}{14}\begin{bmatrix}2 & +1\\ -5 & 3\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B\Rightarrow\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}=+\frac{1}{14}\begin{bmatrix}2 & +1\\ -5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 9\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$$

۳-دستور کرامر:

اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه وارون پذیر باشد $(|A|\neq 0)$ آنگاه تنها جواب دستگاه برابر است با:

$$X_i=\frac{\det A}{\det A}\qquad i=1,2,\dots n$$

که در آن A ماتریس ضرایب مجهولات و A_i ماتریسی است که از جایگزین کردن ماتریس $\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ .\\ b_n\end{bmatrix}$ در ستون i ام ماتریس A به دست می آید به عبارتی پاسخها را در ستون مجهول مورد نظر قرار می دهیم.

مثال: دستگاه زیر ار به روش کرامر حل کنید

$$\begin{cases}3x+2y=1\\ x-y=2\end{cases}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5$$

A_x: جوابها را در ستون xها قرار می دهیم

$$\det A_x=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5$$

A_y : جوابها را در ستون yها قرار می دهیم

$$\det A_y=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5$$

$$X=\frac{\det A_X}{\det A}=\frac{-5}{-5}=1\qquad\qquad y=\frac{\det A_y}{\det A}=\frac{5}{-5}=-1$$

دستگاه همگن:

دستگاهی که ماتریس اعداد ثابت آن همگی صفر باشد همگن گویند به عنوان مثال $\begin{cases}3x+6y=0\\ 2x-5y=0\end{cases}$ یک دستگاه همگن است و $\begin{cases}6x+2y=0\\ 5x-4y=1\end{cases}$ دستگاه غیر ممکن است.

نکته: همواره $x_1=x_2=\dots\dots=x_n=0$ یک جواب دستگاه همگن است. که جواب صفر موسوم به جواب بدیهی است.

قضیه:

یک دستگاه n معادله n مجهولی همگن دارای یک جواب غیر بدیهی (غیرصفر) است اگر و فقط اگر دترمینان ماتریس ضرائب دستگاه برابر صفر باشد.

مثال: دستگاه معادلات همگن زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

با استفاده از دستور ساروس دترمینان را محاسبه می کنیم

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right| = (-1+(-2)+2)-(-4+1-1) = +3 \neq 0$$

چون دترمینان ضرائب مخالف صفر است بنابراین دارای جواب بدیهی $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ است

نکته: در صورتی که دستگاه همگن دارای m معادله و n مجهول باشد همواره دارای یک جواب غیر بدیهی (غیر صفر) است اگر $(n \rangle m)$ باشد و قطعاً تعداد n-m عدد مجهول آزاد وجود دارد

مثال: دستگاه همگن زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$[A|\ B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -10 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -\frac{7}{5} & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \overset{x_3 = a}{\underset{x_4 = b}{\Rightarrow}} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}a \\ x_2 = \frac{7}{5}a - 2b \end{cases}$$

چون m=۲ و n=۴ است بنابراین قطعاً $n - m = 4 - 2 = 2$ مجهول آزاد وجود دارد.

قضیه۱: اگر x_1, x_2 دو جواب دستگاه غیر همگن AX=B باشند آنگاه $x_2 - x_1$ و $x_1 - x_2$ جوابهایی برای دستگاه همگن $AX=0$ خواهند بود. بنابراین دستگاه غیر همگن AX=B دارای یک جواب منحصر به فرد است اگر و فقط اگر دستگاه همگن $AX=0$ جواب منحصر به فرد داشته باشد.

نکته: هر عنصر R^n را یک بردار یک نقطه می نامیم

استقلال و وابستگی خطی

مجموعه m بردار $\{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \ldots, \overrightarrow{V_n}\}$ از عناصر فضای برداری R^n را مستقل خطی گویند.

اگر هیچ مجموعه ای از اعداد حقیقی $C_۱,C_۲,.....C_m$ بجز $C_۱=C_۲=.....C_m=۰$ وجود نداشته باشد به طوری که $C_۱\overrightarrow{V_۱}+C_۲\overrightarrow{V_۲}+........+C_m\overrightarrow{V_m}=۰$ به عبارتی مجموعه m بردار $\{\overrightarrow{V_۱},\overrightarrow{V_۲},....\overrightarrow{V_m}\}$ مستقل خطی است، اگر و فقط اگر جواب معادله $C_۱\overrightarrow{V_۱}+C_۲\overrightarrow{V_۲}+........+C_m\overrightarrow{V_m}=۰$ برای هر i ، $C_i=۰$ باشد در غیر این صورت این مجموعه را وابسته خطی می نامیم.

نکته: مجموعه بردارهای $\{\overrightarrow{V_۱},\overrightarrow{V_۲},....\overrightarrow{V_x}\}$ مستقل خطی است اگر و فقط اگر دترمینان ماتریس تشکیل شده از مجموعه بردارها مخالف صفر باشد. البته در صورتی که ماتریس مربع حاصل شود و دترمینان قابل محاسبه باشد بنابراین اگر ماتریس تشکیل شده از مجموعه بردارها A بنامیم اگر $|A|\neq ۰$ باشد مستقل خطی و اگر $|A|=۰$ باشد مجموعه بردارها وابسته خطی می باشد.

مثال: آیا مجموعه بردارهای $\{(۱,۰,۱),(۲,۰,۰),(۰,۰,۳)\}$ مستقل خطی است

چون ستون دوم برابر صفر است بنابراین دترمینان برابر صفر است و بردارها وابسته خطی هستند.

$$\det A=\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{vmatrix}=۰$$

مثال: آیا مجموعه بردارها $\{(۱,۲,۱),(۳,۰,۱),(۱,۰,۲)\}$ مستقل خطی است

با استفاده از دستور ساروس

$$\det A=\left|\begin{matrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{matrix}\right|\begin{matrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{matrix}\right|=(۰+۲+۰)-(۱۲+۰+۰)=-۱۰\neq ۰$$

چون دترمینان مخالف صفر است مستقل خطی هستند

رتبه ماتریس:

فرض کنید A یک ماتریس m×n باشد. حداکثر تعداد سطرهای مستقل خطی ماتریس A را رتبه ماتریس A نامیده و با r(A) نشان می دهیم و به عبارتی رتبه ماتریس A برابر با حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در مجموعه $\{R_۱,R_۲,....,R_m\}$ است.

نکته۱) رتبه ماتریسA برابر با تعداد سطرهای بزرگترین زیر ماتریس مربع A است که دترمینان آن ناصفر می باشد بنابراین در صورتی که دترمینان ماتریسA مخالف صفر باشد رتبه ماتریس برابر رتبه ماتریس است.

نکته۲) با توجه به تعریف رتبه ماتریس یک روش برای تعیین رتبه ماتریس در صورتی که دترمینان A برابر صفر شود این است که ماتریسA را به ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم در این صورت تعداد عناصر مخالف صفر روی قطر اصلی رتبه ماتریس است.

مثال: رتبه ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۳ & ۰ & ۱ \\ ۴ & ۵ & -۱ \end{bmatrix}\Rightarrow \det A=\left|\begin{matrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۳ & ۰ & ۱ \\ ۴ & ۵ & -۱ \end{matrix}\right|\begin{matrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ \\ ۴ & ۵ \end{matrix}\right|=(۰+۸+۶۰)-(-۶+۵+۰)=۶۹\neq ۰$$

بنابراین رتبه ماتریس برابر ۳ است

مثال: رتبه ماتریس را تعیین کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۲ & ۶ & -۲ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \det A=\left|\begin{array}{ccc|cc} ۱ & ۳ & -۱ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۶ & -۲ & ۲ & ۶ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{array}\right| = (۶-۶+۰)-(۶+۰-۶)=۰$$

بنابراین رتبه ماتریس کمتر از ۳ است و تبدیل به ماتریس بالا مثلثی میکنیم.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۲ & ۶ & -۲ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow[R_۳-R_۱\to R_۳]{R_۲-۲R_۱\to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۲ \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_۳\leftarrow R_۲ \\ R_۳\to R_۲}} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۰ & -۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

چون ماتریس برابر یک است جون تعداد عناصر روی قطر اصلی یکی است

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & -۶ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \xrightarrow[R_۳-۲R_۱\to R_۳]{R_۲-۳R_۱\to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

خواص رتبه ماتریس

الف) رتبه ماتریس واحد برابر مرتبه ماتریس واحد است $r(I_n)=n$

ب) رتبه ماتریس A با رتبه ترانهاده A برابر است یعنی $r(A)=r(A^T)$

پ) اگر A ماتریس $n\times n$ باشد اگر $|A|\neq ۰$ باشد $r(A)=n$ و اگر $|A|=۰$ باشد $r(A)\langle n$ است.

ت) رتبه حاصل ضرب دو ماتریس همواره نابیشتر از کوچکترین رتبه دو ماتریس است یعنی $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$ است.

بررسی تعداد جوابهای دستگاه معادلات خطی $AX=B$ با توجه به مفهوم رتبه ماتریس اگر A ماتریس ضرایب دستگاه m معادله خطی n مجهولی باشد و $[A|\ B]$ ماتریس مرکب A و B باشد رتبه ماتریس مرکب $[A|\ B]$ را با $r\ (A|\ B)$ نشان می دهیم، داریم.

الف) اگر $r(A|\ B)=r(A)$ باشد آنگاه دستگاه دارای حداقل یک جواب است.

ب) اگر $r(A|\ B)=r(A)=n$ باشد انگاه دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد است.

پ) اگر $r(A|\ B)=r(A)\langle n$ آنگاه دستگاه دارای بینهایت جواب و مجموعه سطرهای ماتریس A وابسته خطی است($|A|=۰$)

ت) اگر $r(A|\ B)\neq r(A)$ آنگاه دستگاه جواب ندارد.

مثال: در مورد حل پذیری دستگاه معادلات خطی زیر تحقیق کنید.

$$\begin{cases} ۳x+۲y+z=۱ \\ x+y+z=۰ \\ x-y+۲z=۲ \end{cases}$$

ابتدا با استفاده از دستور ساروس دترمینان ماتریس ضرائب را بدست می آوریم

$$A=\left|\begin{array}{ccc|cc} ۳ & ۲ & ۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ & ۱ & -۱ \end{array}\right| = (۶+۲+(-۱))-(۴+(-۳)+۱)=۵\neq ۰$$

بنابراین $r(A)=۳$ است یا به صورت زیر$r(A)$ تعیین می کنیم برای سهولت در محاسبات جـای سـطر دوم و اول را عوض می کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \xrightarrow[R_۳-R_۱\to R_۳]{R_۲-۳R_۱\to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۳-۲R_۲\to R_۳} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow r(A)=۳$$

$$[A|\ |B]=\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ & ۲ \end{array}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ -۱ & +۲ & ۲ \end{bmatrix} \xrightarrow[R_۳+R_۱\to R_۳]{R_۲-۲R_۱\to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & +۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$R_۳+۳R_۲\to R_۳ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \qquad r(A|B)=۳$$

بنابراین $r(A|\ B)=r(A)=n=۳$ طبق قسمت (ب) دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.

در مورد حل پذیری دستگاه زیر تحقیق کنید.

$$\begin{cases} x_۱-۳x_۲+x_۳=-۴ \\ ۲x_۱-۶x_۲+۲x_۳=۳ \\ -۲x_۱+۴x_۲+۶x_۳=۴ \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۱ \\ ۲ & -۶ & ۲ \\ -۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix} \xrightarrow[R_۳+۲R_۱\to R_۳]{R_۲-۲R_۱\to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۸ \end{bmatrix} \Rightarrow r(A)=۲$$

$$[A|B]\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۳ & ۱ & -۴ \\ ۲ & -۶ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۴ & ۶ & ۴ \end{array}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۴ \\ ۲ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۶ & ۴ \end{bmatrix} \xrightarrow[R_۳+۲R_۱\to R_۳]{R_۳-۲R_۱\to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۱۱ \\ ۰ & ۸ & -۴ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_۳\leftarrow R_۲ \\ R_۳\to R_۲}} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۴ \\ ۰ & ۸ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۱۱ \end{bmatrix} \Rightarrow r(A|B)=۳$$

بنابراین $r(A|\ B)\neq r(A)$ است و دستگاه جواب ندارد.

در مورد حل پذیری دستگاه معادلات خطی زیر تحقیق کنید.

$$\begin{cases} x_۱+x_۲-x_۳=۳ \\ -۲x_۱-۲x_۲+۲x_۳=-۶ \\ x_۱+۲x_۲-۲x_۳=۵ \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ -۲ & -۲ & +۲ \\ ۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix} \xrightarrow[R_۳-R_۱\to R_۳]{R_۲+۲R_۱\to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow r(A)=۲$$

$$[A|B]\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & -۱ & ۳ \\ -۲ & -۲ & +۲ & -۶ \\ ۱ & ۲ & -۲ & ۵ \end{array}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ -۲ & -۲ & -۶ \\ ۱ & ۲ & ۵ \end{bmatrix} \xrightarrow[R_۳-R_۱\to R_۳]{R_۲-۲R_۱\to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$r(A|\ B)=۲$

بنابراین $r(A)=r(A|\ B)=۲\langle n=۳$ و دستگاه دارای بینهایت جواب است.

تابع خطی:

تابع n متغیر f از فضای برداری R^n به فضای برداری R^m را که به ازای هر عدد حقیقی r و هر دو تایی

$$X=\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad ,y=\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

از R^n در دو شرط زیر صدق کند را یک تابع خطی می نامیم.

۱- $f(x+y)=f(x)=f(y)$

۲- $f(rx)=rf(x)$

مثال: نشان دهید $f(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} ۳x_۲ \\ ۴x_۱ \\ ۲x_۱+۵x_۲ \end{bmatrix}$ یک تابع خطی است

فرض $x=\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}, y=\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix}$ دو تایی دلخواه در فضای $R^۲$ باشند.

$$۱) f(x+y)=f(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix})=f(\begin{bmatrix} x_۱+y_۱ \\ x_۲+y_۲ \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} ۳(x_۲+y_۲) \\ ۴(x_۱+y_۱) \\ ۲(x_۱+y_۱)+۵(x_۱+y_۱) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۳x_۲ \\ ۴x_۱ \\ ۲x_۱+۵x_۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳y_۲ \\ ۴y_۱ \\ ۲y_۱+۵y_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$$۲) f(rx)=f(r\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix})=f(\begin{bmatrix} rx_۱ \\ rx_۲ \end{bmatrix})=f\begin{bmatrix} ۳rx_۲ \\ ۴rx_۱ \\ ۲rx_۱++۵rx_۲ \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} ۳x_۲ \\ ۴x_۱ \\ ۲x_۱+۵x_۲ \end{bmatrix}$$

$$rf(x) \Rightarrow f(rx)=rf(x)$$

در نتیجه شرط ۱ و ۲ صادق است و f یک تابع خطی است

قضیه:

تابع $R^m \to R^n$ خطی است اگر و فقط اگر هر مولفه مقدار تابع f در $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ به صورت یک ترکیب خطی از اعداد $X_1, X_2, ..., X_n$ باشد.

از این قضیه نتیجه می شود که اگر $f: R^n \to R^m$ یک تابع خطی باشد آنگاه اعداد حقیقی وجود دارند به طوری که f(x)=Ax که ماتریس A یک ماتریس نمایشگر تابع خطی f است.

نکته: در صورتی که $f: R^n \to R^m$ دارای توان غیر یک یا عدد ثابت یا توابع لگاریتمی توابع مثلثاتی و غیره باشد نمی تواند نشانگر یک تابع خطی باشد. مانند

$$۱)\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} ,۲)\begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2 \\ x_3^2 \end{bmatrix} \quad ۳)\begin{bmatrix} \sin x_1 \\ \cos x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad ۴)\begin{bmatrix} x_1x_2 \\ x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \end{bmatrix}$$

تابع شماره یک چون x_1 دارای توان ۲ است

تابع شماره دو چون دارای عدد ثابت است x_1+1

تابع شماره سه چون دارای نسبتهای مثلثاتی است

تابع شماره چهار چون ضرب x_1x_2 دارد

مثال: آیا تابع $f: R^3 \to R^3$ یک تابع خطی است. در این صورت ماتریس نمایشگر آن را برای هر $x \in R^3$ بنویسید.

$$f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -2x+x_3 \\ x_1-5x_2 \\ x_1-x_2+x_3 \end{bmatrix}$$

تابع خطی است چون فقط جمع و تفریق بین x ها وجود دارد

بنابراین ماتریس آن به صورت زیر است.

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

فرض کنید $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ نمایشگر $f: R^2 \to R^3$ باشد ضابطه تعریف تابع خطی f را تعیین کنید.

$$f(x)=f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1+x_2 \\ 2x_1+4x_2 \\ -5x_1 \end{bmatrix}$$

تابع صفر:

تابع $f:R^n \to R^m$ را که برای هر $x \in R^n$ به صورت زیر تعریف می شود را تابع صفر گویند.

$$f(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ . \\ x_n \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

تابع همانی:

تابعی که هیچ تغییری ایجاد نکند را تابع همانی گویند به عبارتی تابع $I:R^n \to R^m$ را که برای هر $x \in R^n$ به صورت زیر می باشد و ماتریس نمایشگر آن ماتریس واحد مرتبه n است.

$$I(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ . \\ x_n \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

نکته: جهت انجام اعمال جمع دو تایی و ضرب اسکالر یک تابع خطی کافیست آن اعمال را روی ماتریس نمایشگر آنها انجام دهیم.

$$(f+g)x = f(x) + g(x)$$
$$(kf)(x) = kf(x)$$

مثال: توابع خطی $f:R^۲ \to R^۳$ و $g:R^۲ \to R^۳$ را به صورت در نظر گرفته ایم توابع f+g و ۳y را تعیین کنید.

$$f(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_۱ + x_۲ \\ x^۱ - x_۲ \\ ۴x_۲ \end{bmatrix} \qquad g(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} ۲x_۱ - x_۲ \\ x^۱ + x_۲ \\ ۳x_۱ \end{bmatrix}$$

$$(f+g)(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}) = f(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}) + g(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_۱ + x_۲ \\ x_۱ - x_۲ \\ ۴x_۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲x_۱ - x_۲ \\ x_۱ + x_۲ \\ ۳x_۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳x_۱ \\ ۲x_۱ \\ ۳x_۱ + ۴x_۲ \end{bmatrix}$$

$$(۳g)\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = ۳\begin{bmatrix} ۲x_۱ - x_۲ \\ x_۱ + x_۲ \\ ۳x_۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶x_۱ - ۳x_۲ \\ ۳x_۱ + ۳x_۲ \\ ۹x_۱ \end{bmatrix}$$

نکته: برای بدست آوردن ترکیب توابع خطی $f:R^n \to R^m$ و $g:R^n \to R^m$ کافی است ضرب ماتریسهای نمایشگر خطی آنها را بدست آوریم.

مثال: دو تابع خطی $f:R^۲ \to R^۳$ و $g:R^۲ \to R^۳$ را با ضابطه های تعریف شده زیر در نظر بگیرید.

$$f(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} ۳x_۱ \\ x^۱ - ۲x_۲ \\ x_۲ \end{bmatrix} \qquad g(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_۱ - x_۲ \\ x_۲ + x_۳ \\ x_۱ + ۳x_۲ \end{bmatrix}$$

تابع مرکب gof را بدست آورید.

$$gof\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 6x_1 - 6x_2 \end{bmatrix}$$

نکته: در صورتی $I(x) = gof = fog(x)$ باشد تابع یک به یک است و وارون پذیر است.

مثال: آیا دو تابع خطی زیر وارون یکدیگرند.

$$f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 7x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad g(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 7x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$fog(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$gof(x) = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین تابع fوg وارون یکدیگرند.

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

فرض کنید x وy دو ماتریس ستونی (بردار) غیر صفر و λ عدد حقیقی غیرصفر باشد. اگر در رابطه Ax=y و $y=\lambda x$ باشد. λ را یک مقدار ویژه و x را بردار ویژه ماتریس A گویند.

$$\begin{cases} Ax + y \\ y = \lambda x \end{cases} \Rightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda I_n x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I_n)x = 0$$

بنابراین λ مقدار ویژه و X بردار ویژه می باشد در معادله $(A - \lambda I_n)x = 0$ صدق می کند شرط وجود جواب غیربدیهی برای دستگاه معادلات فوق آن است که $|A - \lambda I_n| = 0$ باشد.

مثال: مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I_n| = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(3-\lambda) - (4 \times 3) = 0$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 12 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 6) = 0$$

$$\lambda = -1 \quad , \lambda = 6$$

نکته: $|\ A-\lambda I_n\ |=0$ را معادله مشخصه مقادیر ویژه گویند و می توان نتیجه گرفت مجموع مقادیر ویژه برابر اثر ماتریس A است $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ و حاصل ضرب مقادیر ویژه برابر دترمینان A است $|\ A\ |=\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}}\lambda_i$

بنابراین می توان گفت معادله مشخصه ماتریس ۲×۲ به صورت زیر است.

$$\lambda^2-tr(A)\lambda+|A|=0$$

طریقه بدست آوردن بردار ویژه:

برای هر λ می توان یک بردار ویژه بدست آورد این بردارها را بردارهای ویژه A گویند برای بدست آوردن بردارهای ویژه کافیست مقادیر λ را در رابطه معادله مشخصه ماتریس A یعنی $(A-\lambda I_n)x=0$ قرار دهیم و دستگاه بدست آمده را حل کنیم.

مثال: مقادیر ویژه و بردار ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}4&3\\1&2\end{bmatrix}$ را بدست آورید

$$|\ A-\lambda I_n\ |=0\Rightarrow\begin{vmatrix}4-\lambda&3\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda^2-6\lambda+5=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=5$$

$$\lambda_1=1\Rightarrow\begin{vmatrix}4-1&3\\1&2-1\end{vmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3x+3y=0\\x+y=0\end{cases}\Rightarrow x=-y$$

هر بردار به صورت $\begin{bmatrix}x\\-x\end{bmatrix}$ بردار ویژه نظیر $\lambda=1$ است مثلاً $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$$\lambda_2=1\Rightarrow\begin{bmatrix}4-1&3\\1&2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}-x+3y=0\\1x-3y=0\end{cases}\Rightarrow x=3y$$

هر بردار به صورت $\begin{bmatrix}x\\\frac{x}{3}\end{bmatrix}$ بردار ویژه نظیر $\lambda=5$ است مثلاً $\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$

نکته: همانگونه مشاهده می شود برای هر مقدار λ بردارهای $x\neq0$ بدست آورد که همگی با هم موازیند

مثال: مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$|\ A-\lambda I_n\ |=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\2&3-\lambda&2\\3&3&4-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow-\lambda\ +9\lambda^2-15\lambda+7=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=5$$

$$\Rightarrow(\lambda-7)(\lambda^2-2\lambda+4)=0\Rightarrow(\lambda-7)(\lambda-1)^2=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=1\\\lambda_2=1\\\lambda_3=7\end{cases}$$

$$|\ A-\lambda I_n\ |=0\Rightarrow\begin{cases}(2-\lambda_i)x_1+x_2+x_3=0\\2x_1+(3-\lambda_i)x_2+2x_3=0\\3x_1+3x_2+(4-\lambda_i)x_3=0\end{cases}$$

برای $\lambda_1=1$ معادله اول به صورت $x_1+x_2+x_3=0$ می شود بنابراین (۰و۱-و۱) در معادله صدق مـی کنـد و یک بردار ویژه برای $\lambda_1=1$ است و همچنین برای $\lambda_2=1$ می توان (۱-و۰و۱) را به عنوان یک بردار ویژه در نظـر گرفت.

و به ازای $\lambda_3=7$

$$\begin{cases}-5x_1+x_2+x_3=0\\2x_1-4x_2+2x_3=0\\3x_1+3x_2-3x_3=0\end{cases}$$

دستگاه را به یک روش دلخواه حل کنیم

$$A=\begin{bmatrix}-5&1&1\\2&-4&2\\3&3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-5&1&1\\2&-4&2\\3&3&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[5R_3+3R_2\to R_3]{5R_2+2R_1\to R_2}\begin{bmatrix}-5&1&1\\0&-18&12\\0&18&12\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2\to R_3}\begin{bmatrix}-5&1&1\\0&-18&12\\0&0&24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}-5x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow -5x_1+\frac{2}{3}x_3+x_3=0\Rightarrow 5x_1=\frac{5}{3}x_3\Rightarrow x=\frac{1}{3}x_2\\-18x_2+12x_3=0\Rightarrow x_2=\frac{12x_3}{18}=\frac{2}{3}x_3\\24x_3=0\end{cases}$$

بنابراین $x_1=\frac{1}{2}x_2=\frac{1}{3}x_3$ است و می توان نتیجه گرفت (۳و۲و۱) یک بردار ویژه برای $\lambda=7$ است که مستقل از دو بردار ویژه دیگر است.

فصل پنجم
توابع چند متغیره

تابع چند متغیره:

تابع f را که قلمرو آن زیر مجموعه ای از R^n و برد آن زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی R باشد یک تابع n متغیره می نامیم. $f:R^n \to R$

مثال: تابع $f:R^2 \to R$ با ضابطه تعریف $f(x,y)=x^3+y^4-6$ یک تابع دو متغیره است.

مثال: تابع $f:R^3 \to R$ با ضابطه تعریف $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{1}+x_1x_2-x_3$ یک تابع سه متغیره است

اعمال جبری بر روی توابع چند متغیره:

اگر g,f دو تابع n متغیره باشند آنگاه هر x از R^n و هر عدد حقیقی c اعمال جبری به صورت زیر تعریف می شود.

$$1)(f\pm g)x=f(x)\pm g(x)$$
$$2)(kf)(x)=kf(x)$$
$$3)(f.g)x=f(x)g(x)$$
$$4)(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

دامنه تعریف توابع f+g و f-g و f.g برابر با اشتراک دامنه های g,f است و دامنه تعریف $\frac{f}{g}$ برابر اشتراک دامنه های g,f است بجز نقاطی که $g(x)=0$ و تابع kf دامنه تعریف برابر با f دارد

دامنه تعریف (قلمرو):

مقادیری از n تایی $(x_1,x_2,.......x_n)$ که در ضابطه تابع تعریف شده باشند را دامنه تعریف گویند.

مثال: دامنه تعریف تابع $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$ را بدست آورید.

بایستی زیر رادیکال بزرگتر مساوی صفر باشد $\{(x,y)|x^2+y^2-9\ge 0\}$

مثال: دامنه تعریف تابع $f(x,y)=\frac{6}{x-5y}$ را پیدا کنید.

بایستی مخرج مخالف صفر باشد. $\{(x,y)|x-5y\neq 0\}$

مثال: قلمرو تابع $f(x,y)=5\sqrt{x}-6\sqrt{y}$ را پیدا کنید

دامنه تعریف نقطه اشتراک $x\ge 0,y\ge 0$ است در واقع ناحیه اول محورهای مختصات

$$\{(x,y)|x\ge 0,y\ge 0\}$$

مثال: تابع $f(x,y)=6-x^2+y^2$ و $g(x,y)=x^2+y^3$ توابع f+g و f-g و $\frac{f}{g}$ را بدست آورید.

$$(f\pm g)(x,y)=f(x,y)\pm g(x,y) \qquad f\pm g:R^2\to R$$

$$(f+g)(x,y)=6-x^2+y^2+x^2+y^3=6+y^2+y^3$$

$$(f-g)(x,y)=6-x^2+y^2-(x^2+y^3)=6-2x^2+y^2-y^3$$

$$\frac{f}{g}(x,y):R^2-\{x^2+y^3\neq 0\}\to R$$

$$\frac{f}{g}(x,y)=\frac{6-x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

حد توابع چند متغیره:

فرض کنیم f یک تابع دو متغیره باشد. گویند حد تابع f در نقطه (a,b) برابر L است، اگر هنگامی نقطه (x,y) به نقطه (a,b) نزدیک شود مقدار f(x,y) به عدد حقیقی L نزدیک شود به عبارتی $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$

بنابراین می توان گفت تابع n متغیره f در نقطه P_0 در R^n مفروضند و تابع f در یک همسایگی اطراف P_0 تعریف شده است اگر به ازای هر $\varepsilon>0$ بتوان $\delta_{P_0,\varepsilon}$ را چنان یافت که

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta_{P_0,\varepsilon}>0 \quad 0<|P-P_0|<\delta\Rightarrow|f(P)-L|<\varepsilon$$

برای تابع دو متغیره $\Rightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\Rightarrow|F(x,y)-L|<\varepsilon$

لازم به توضیح است که برای توابع n متغیره همانند تعریف بالا عمل می شود با این تفاوت که در حالت دو متغیره به جای $P_0=(a,b)$ و در حالت n متغیره $P_0=(x_1,x_2,\ldots\ldots x_n)$ در نظر گرفته می شود.

نکته: حد توابع چند متغیر در صورت وجود منحصر به فرد است حال اگر از دو مسیر متفاوت به P_0 نزدیک و مقدار حد برابر نشود می توان نتیجه گرفت که حد موجود نیست.

مثال: حد تابع $f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$ را در (۰و۰) بررسی کنید.

برای حل y را برابر mx فرض می کنیم و بایستی به یک عدد منحصر به فرد برسیم و m وابسته نباشد.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(mx)^2-x^2}{(mx)^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(m^2-1)}{x^2(m^2+1)}=\frac{m^2-1}{m^2+1}$$

حال به ازای m های مختلف باید یک نتیجه حاصل شود

اگر m=۰ باشد حد برابر ۱- و اگر m=۱ باشد حد برابر صفر است بنابراین تابع دارای حد نیست.

قضیه:

اگر حد تابع دو متغیره f در نقطه (a,b) برابر L باشد آنگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(a,y)=L\Rightarrow\lim_{(a,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \quad ,\lim_{(x,b)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

است که مفهوم آن به صورت زیر می باشد

حد تابع f وقتی که نقطه (x,y) در مسیرهای x=a , y=b به نقطه (a,b) میل کند برابر با L است ولی عکس این قضیه صادق نیست

مثال: حد تابع $f(x,y)=۶x^{۲}-۳y$ را در نقطه (۳و۱) بدست آورید.

$$\lim_{(x,y)\to(۱,۳)} f(x,y)=\lim_{(a,y)\to(۱,۳)} ۶x^{۲}-۳y=۶\times ۱^{۲}-۳\times ۳=-۳$$

حد تابع $f(x,y)=\dfrac{۴x^{۳}-۵y^{۲}}{x^{۳}+y^{۲}}$ را در نقطه (۰و۰) در صورت وجود بدست آورید.

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)=\frac{۴(۰)^{۳}-۵(۰)^{۲}}{(۰)^{۳}+(۰)^{۲}}=\frac{۰}{۰} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,۰)=\lim_{(x,۰)\to(۰,۰)}\frac{۴x^{۳}-۵x۰}{x^{۳}+۰}=\lim ۴=۴$$

$$\lim_{(۰,y)\to(۰,۰)} f(۰,y)=\lim_{(۰,y)\to(۰,۰)}\frac{۴(۰)^{۳}-۵y^{۲}}{(۰)^{۳}+y^{۲}}=\lim(-۵)=-۵$$

چون $\lim_{(x,۰)\to(۰,۰)} f(x,۰)\neq\lim_{(۰,y)\to(۰,۰)} f(۰,y)$ بنابراین تابع در (۰و۰) حد ندارد

تعریف: $\lim_{x\to y}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right]$ یعنی ابتداx را ثابت فرض کرده و $\lim f(x,y)$ را در صورت وجود حساب کرده سپس حد را وقتی x پیدا می کنیم

نکته: اگر $\lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right]\neq\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right]$ آنگاه تابع f در نقطه (a,b) حد ندارد.

مثال: حد تابع $f(x,y)=\dfrac{y^{۳}}{x^{۴}+y^{۳}}$ در نقطه (۰و۰) در صورت وجود بدست آورید.

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)=\frac{۰^{۳}}{۰^{۳}+۰^{۳}}=\frac{۰}{۰} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۰}\left[\lim_{y\to ۰} f(x,y)\right]=\lim_{x\to ۰}\left[\frac{۰^{۳}}{x^{۴}+۰^{۳}}\right]=۰$$

$$\lim_{y\to ۰}\left[\lim_{x\to ۰} f(x,y)\right]=\lim_{y\to ۰}\left[\frac{y^{۳}}{۰^{۴}+y^{۳}}\right]=\lim\left[\frac{y^{۳}}{y^{۳}}\right]=۱$$

چون ۱ ≠ ۰ به عبارتی $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] \neq \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]$ تابع حد ندارد

قضیه های حد توابع چند متغیره:

اگر حد توابع دو متغیره g,f در نقطه (a,b) وجود داشته باشد. آنگاه

$$۱)\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f \pm g)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \pm \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

$$۲)\lim_{(x,y)\to(a,b)}(kf)(x,y) = k\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

$$۳)\lim_{(x,y)\to(a,b)}(fg)(x,y) = \left[\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\right]\left[\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)\right]$$

$$۴)\lim(\frac{f}{g})(x,y) = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x,y} g(x,y)} \quad ,\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)\neq 0$$

نکته: اگر حد تابع و مقدار تابع برابر باشند تابع در نقطه مورد نظر پیوسته است

قضیه: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ و تابع یک متغیره g در L پیوسته باشد آنگاه

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}(g.f) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(f(x,y)) = g(L)$$

مثال: مقدار $\lim_{(x,y)\to(e,1)} L_n(e^{۲} - \frac{x}{y})$ را محاسبه کنید.

$$\lim Ln(e^{۲}.\frac{x}{y}) = \lim Ln(e^{۲} - \frac{e}{۱}) = Ln(e^{۲} - e)$$

نکته: تابع دومتغیره f در نقطه (a,b) پیوسته است اگر سه شرط زیر برقرار باشد

الف)تابع f در نقطه (a,b) تعریف شده باشد

ب) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود داشته باشد. یعنی $f(a,b)$ معین باشد.

پ) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

مثال: آیا با ضابطه تعریف $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy + ۲x^{۲}}{x^{۲} + y^{۲}} \\ ۰ \end{cases}$ در نقطه (۰و۰) پیوسته است

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{0+2x^2}{x^2+0}=2$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]=\lim_{y\to 0}\frac{0+0}{0+y^2}=0$$

چون $0 \neq 2$ نیست بنابراین تابع حد ندارد و پیوسته نیست

مثال: آیا تابع دو متغیره $h(x,y)=\cos(x^2-2y)$ پیوسته است

چون تابع x^2-2y یک چند جمله ای است و پیوسته است و تابع $g(z)=\cos z$ نیز پیوسته است بنابراین طبق قضیه قبل این تابع پیوسته است

$f(x,y)=x^2-2y$ پیوسته است و $g(z)=\cos z$ پیوسته است. بنابراین g.f=h نیز پیوسته است.

نکته: در صورتی که توابع fوg در نقطه (a,b) پیوسته باشند در این صورت توابع $f\pm g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ $(g(a,b)\neq 0)$ نیز پیوسته در نقطه (a,b) پیوسته هستند.

مشتقهای جزئی

اگر در تابع n متغیره f تمام متغیرها به جز یکی از آنها را ثابت نگه داریم و مانند یک عقیقی در نظر بگیریم تابعی یک متغیره خواهیم و مشتق آن مانند توابع یک متغیره می باشد. که مشتق این تابع یک متغیره را یک مشتق جزئی تابع f می نامیم و به صورت زیر تعریف می شود.

مشتق نسبت به x و y ها عدد ثابت فرض شود $\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

مشتق نسبت به y و x ها عدد ثابت فرض شود $\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$

مثال: مشتق های جزئی مرتبه اول تابع $f(x,y)=x^2-4y$ را بدست آورید.

Yها عدد ثابت فرض می شود و نسبت به x مشتق می گیریم $f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=2x$

xها عدد ثابت فرض می شود و نسبت به y مشتق می گیریم $f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=-4$

مشتقهای جزئی مرتبه بالاتر:

همانگونه در توابع یک متغیره از یک تابع می توانستیم تا چند مرتبه مشتق بگیریم در توابع n متغیر نیز می توان در صورت امکان چندین مرحله مشتق جزئی محاسبه کرد. که به صورت زیر تعریف می شود.

یعنی دو بار نسبت به x مشتق بگیریم. $f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$

یعنی دو بار نسبت به y مشتق بگیریم. $f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$

یعنی ابتدا نسبت به y مشتق بگیریم سپس نسبت به x

$$f_{yx} = \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

یعنی ابتدا نسبت به x مشتق بگیریم سپس نسبت به y

$$f_{xy} = \frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

مشتقات مرتبه بالاتر نیز به همین ترتیب تعریف می شوند.

مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم تابع $f(x,y) = x^۳ + ۳x^۲y + y^۲ - ۴y^۳$ را بدست آورید.

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = ۳x^۲ + ۶xy$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = ۳x^۲ + ۲y - ۱۲y^۲$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^۲ f}{vx^۲} = ۶x + ۶x$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = ۲ - ۲۴y$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(۳x^۲ + ۲y - ۱۲y^۲) = ۶x$$

$$\Rightarrow fyx = fxy$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(۳x^۲ + ۶xy) = ۶x$$

قضیه: اگر f تابعی با دو متغیره با متغیرهای xوy باشد و توابع f_{xy} و f_{yx} در نقطه (a,b) پیوسته باشند آنگاه $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$

دیفرانسیل کل تابع:

در صورتی که f تابعی دو متغیره و مشتقات مرتبه اول آن موجود باشد دیفرانسیل کل تابع به صورت زیر تعریف می شود.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial x}.dy$$

دیفرانسیل کل توابع بیش از دو متغیر نیز به همین ترتیب تعریف می شود مثلاً اگر g تابعی چهار متغیره باشد دیفرانسیل کل به صورت زیر بدست می آید.

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}.dx + \frac{\partial g}{\partial y}.dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz + \frac{\partial g}{\partial t}.dt$$

مثال: دیفرانسیل کل تابع $f(x,y) = x^۳ - ۲y^۲$ را بدست آورید.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ۳x^۲ \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -۴y$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}.dy = ۳x^۲dx - ۴ydy$$

مثال: دیفرانسیل کل تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۳xy$ را وقتی که $x=۱$ و $y=۲$ و $dx=۰/۱$ و $dy=۰/۲$ است را محاسبه کنید.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ۲x - ۳y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = ۲y - ۳x$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}.dy = df\left|\begin{matrix} dy = ۰/۲ \\ dx = ۰/۱ \\ x = ۱ \\ y = ۲ \end{matrix}\right. = (۲ \times ۱ - ۳ \times ۲) \times ۰/۱ + (۲ \times ۲ - ۳ \times ۱) \times ۰/۲$$

$$df = -۰/۴ + ۰/۲ = -۰/۲$$

نکته: در صورتی f تابعی از دو متغیر xوy باشد و متغیرهای xوy تابعی از t باشند در این صورت داریم:

$$dx = \frac{dx}{dt}.dt \qquad , dy = \frac{dy}{dt}.dt$$

مثال: دیفرانسیل کل تابع $f(t^۲, ۳t, t^۳) = x^۲ + ۲y^۲ + z^۳$ را بدست آورید.

جواب: با توجه به سوال $z = t^۳, y = ۳t, x = t^۲$ است

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t}.dt = ۲tdt$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}.dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\left|\begin{matrix} dy = ۳dt \\ dz = ۳t^۲dt \end{matrix}\right.$$

$$df = (۲x).(۲tdt) + (۴y)(۳dt) + (۳z^۲)(۳t^۲)$$

$$df = ۴t^۳dt + ۳۶tdt + ۹t^۸dt$$

$$df = (۹t^۸ + ۴t^۳ + ۳۶t)dt$$

مشتق کل تابع f نسبت به t:

در صورتی که F تابعی از دو متغیر xوy باشد و متغیرهای y,x تابعی از t باشند در این صورت مشتق کل تابع f نسبت به t از رابطه

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

بدست می آید. برای توابع n متغیره $n\rangle ۲$ نیز به همین ترتیب تعریف می شود.

مثال: فرض کنید $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ که در آن $x = \sin t$ و $y = e^t$, $z = \cos t$ مشتق کل f نسبت به t را بدست آورید.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = (y+z)(\cos t) + (x+z)(e^t) + (y+x)(-\sin t)$$

$$\frac{df}{dt} = (\cos t + e^t)\cos t + (\sin t + \cos t)e^t + (e^t + \sin t)(-\sin t)$$

$$\frac{df}{dt}=\cos^{۲} t+۲e^{t}\cos t-\sin^{۲} t$$

قاعده زنجیره ای برای توابع چند متغیره:

اگر f تابعی دو متغیره از y,x باشد و y,x توابعی از دو متغیر UوV باشند آنگاه مشتق جزئی مرتبه اولf نسبت به متغیرهای UوV برابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial U}=\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial U}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial U}$$

$$\frac{\partial f}{\partial V}=\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial V}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial V}$$

نکته: این قاعده برای توابع بیش از دو متغیر نیز قابل تقسیم است

مثال: فرض $f(x,y)=Ln(x^{۲}+y)$ که در آن $y=۲r+s, x=r-s$ مشتقهای جزئی مرتبه اول f نسبت به r و s را بدست آورید.

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{۲x}{x^{۲}+y}.(۱)+\frac{۱}{x^{۲}+y}.(۲)=\frac{۲x+۲}{x^{۲}+y}=\frac{۲(r-s)+۲}{(r-s)^{۲}+(۲r+s)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{۲x}{x^{۲}+y}.(-۱)+\frac{۱}{x^{۲}+y}.(۱)=\frac{-۲x+۱}{x^{۲}+y}=\frac{۱-۲(r-s)}{(r-s)^{۲}+(۲r+s)}$$

مشتق گیری ضمنی

فرض کنیم $f(x,y)=۰$ و متغیر y تابعی از x باشد به آن تابع ضمنی گویند که بنابر قاعده زنجیره ای نتیجه می گیریم.

$$f(x,y)=۰\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-Fx(x,y)}{Fy(x,y)}=\frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y},\frac{dx}{dy}=\frac{-Fy(x,y)}{Fx(x,y)}=\frac{-\partial f/\partial y}{\partial f/\partial x}$$

نکته: این قاعده برای توابع از دو متغیر نیز قابل تقسیم است.

مثال: اگر $f(x,y,z)=x^{۳}e^{y+z}$ باشد حاصل $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بدست آورید.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Fy(x,y,z)}{Fz(x,y,z)}=-\frac{x^{۳}e^{y+z}}{x^{۳}e^{y+z}}=-۱$$

ماکسیمم و مینیمم توابع در متغیره:

اگر$f(x,y)$ تابعی از دو متغیره y,x باشد و (a,b) نقطه ای از دامنه تعریف آن در این صورت داریم

الف) $f(a,b)$ را ماکسیمم مطلق f گویند. اگر برای هر (x,y) از دامنه تعریف f داشته باشیم $f(x,y)\le f(a,b)$

ب) $f(a,b)$ را مینیمم مطلق f گویند. اگر برای هر (x,y)از دامنه تعریف f داشته $f(x,y)\ge f(a,b)$

پ) تابع f در (a,b) دارای ماکزیمم نسبی است اگر دایره ای به مرکز (a,b) در دامنه f وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر (x,y) در درون دایره داشته باشیم $f(x,y)\le f(a,b)$

ت)تابع f در(a,b) دارای مینیمم نسبی است اگر دایره ای به مرکز (a,b) در دامنه f وجود داشته به طوری که به ازای هر (x,y) در درون دایره داشته باشیم $f(x,y)\ge f(a,b)$

قضیه:

تابع دو متغیر f(x,y) در (a,b)یک ماکسیمم یا مینیمم نسبی دارد اگرf_x و f_y موجود باشد و $f_y(a,b)=0, f_x(a,b)=0$

نکته: نقاط ماکسیمم یا مینیمم را نقاط اکسترمم نیز گویند.

نقطه بحرانی: نقطه (a,b) را نقطه بحرانی گویند اگر در دستگاه صدق کند. $\begin{cases} f_x(a,b)=0 \\ f_y(a,b)=0 \end{cases}$

مثال: اگر $f(x,y)=x^3+y^3-12x$ باشد مقدار ماکسیمم یا مینیمم نسبی تابع f را بدست آورید.

$$\begin{cases} f_x(a,b)=0 \\ f_y(a,b)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-12=0 \Rightarrow x=\pm 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2=0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

بنابراین نقاط (۰و۲+) و (۰و۲-) نقطه بحرانی تابع f می باشد

نقطه (۰و۲+) مینیمم نسبی است $f(2,0)=8+0-24=-16$

نقطه (۰و۲-) ماکسیمم نسبی است $f(-2,0)=-8+0+24=+16$

نکته: اگر $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ ولی تابع f در (a,b) ماکسیمم یا مینیمم نسبی نداشته باشد. تابع f در نقطه (a,b) دارای یک نقطه زین اسبی است.

مراحل تعیین نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و زین اسبی با آزمون مشتق دوم

۱- نقاط بحرانی تعیین می کنیم $\begin{cases} f_x(a,b)=0 \\ f_y(a,b)=0 \end{cases}$

۲- مشتقات مرتبه دوم را محاسبه می کنیم (f_{xx}, f_{yy}, f_{xy})

۳- در صورتی که مشتقهای فرعی مرتبه اول و دوم F موجود باشد و در درون دایره ای به مرکز (a,b) پیوسته باشند $\Delta(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\left[f_{xy}(a,b)\right]^2$

مبین معادله را محاسبه می کنیم که هر یک از حالات زیر امکان دارد رخ دهد.

الف) اگر $f_{xx}(a,b)\langle 0, \Delta(a,b)\rangle 0$ باشد آنگاه f در (a,b) ماکسیمم نسبی دارد

ب) اگر $f_{xx}(a,b)\rangle 0, \Delta(a,b)\rangle 0$ باشد آنگاه f در (a,b) مینیمم نسبی دارد

پ) اگر $\Delta(a,b)\langle 0$ باشد آنگاه f در (a,b) یک نقطه زین اسبی است به عبارتی تابع f اکسترمم نسبی ندارد

ت) اگر $\Delta(a,b)=0$ باشد از این آزمون نتیجه ای به دست نمی آید.

مثال: نقاط اکسترمم نسبی یا نقطه زین اسبی تابع $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$ را بدست آورید.

$$
(1)\begin{cases} f_x = 3x^2 - 6y = 0 \Rightarrow 3x^2 = 6y \Rightarrow x^2 = 2y \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{2} \\ f_y = 3y^2 - 6y = 0 \Rightarrow 3(\dfrac{x^2}{2})^2 - 6x = 0 \Rightarrow \dfrac{3x^4}{4} - 6x = 0 \Rightarrow 3x^4 - 24x = 0 \end{cases}
$$

$$3x(x^3 - 8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, y_1 = 0, y_2 = 2$$

بنابراین نقاط بحرانی تابع f به صورت (۰و۰) و(۲و۲) می باشد.

$$f_{xx} = 6x \qquad f_{yy} = 6y \qquad fxy = -6$$

$$f_{xx}(0,0) = 0 \qquad f_{yy}(0,0) = 0 \qquad fxy(0,0) = -6$$

$$\Delta(a,b) = f_{xx}(a,b).f_{yy}(a,b) - f_{x,y}(a,b) \Rightarrow \Delta(0,0) = 0 \times 0 - (-6)^2 = -36$$

بنابراین نقطه (۰و۰) نقطه زین اسبی است

$$f_{xx}(2,2) = 12 \qquad f_{yy}(2,2) = 12 \qquad fxy(2,2) = -6$$

$$\Delta(2,2) = 12 \times 12 - (-6)^2 = 108 \rangle 0$$

$$\begin{matrix} \Delta(2,2) \rangle 0 \\ f_{xx}(2,2) \rangle 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$ تابع f در نقطه (۲و۲) دارای min نسبی است.

ماکسیمم و مینیمم توابع چند متغیره با محدودیت

در عمل تعیین ماکسیمم و مینیمم یک تابع چند متغیره با توجه به یک یا چند شرط صورت می گیرد که این عمل به دو روش صورت می گیرد.

۱- **روش جایگزینی:** در این روش با توجه به شرط یکی از متغیرها را برحسب متغیرهای دیگر بدست آورده و در تابع اصلی قرار می دهیم.

مثال: فرض کنید مصرف کننده ای بستگی به مصرف او از دو کالا داشته باشد اگر x_2, x_1 میزان مصرف او ۳و۳ واحد پول به ترتیب قیمت این دو کالا و ۲۴ واحد پول درآمد مصرف کننده باشد و تابع مطلوبیت این مصرف کننده به صورت $U = f(x_1 x_2) = 4x_1 x_2$ باشد x_2, x_1 را طوری تعیین کید که مطلوبیت مصرف کننده به حداکثر برسد.

تابع محدودیت به صورت $2x_1 + 3x_2 = 24$ می باشد

$$2x_1 + 3x_2 = 24 \Rightarrow 2x_1 = 24 - 3x_2 \Rightarrow x_1 = 12 - \frac{3}{2}x_2$$

$$U = 4x_1 x_2 \Rightarrow U = 4(12 - \frac{3}{2}x_2).x_2 = 48x_2 - 6x_2^2$$

مشتق نسبت به x_2 می گیریم تا نقاط اکسترمم مشخص شود.

$$\frac{dU}{dx_2} = 48 - 12x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 4$$

$$\frac{d^2U}{dx_2^2} = -12 \langle 0$$ بنابراین در نقطه $x_2 = 4$ دارای ماکزیمم است

$$x_1 = 12 - \frac{3}{2}x_2 = 12 - \frac{3}{2} \times 4 = 6$$

۲- روش لاگرانژ

می خواهیم ماکسیمم یا مینیمم تابع $f(x,y)$ را تحت محدودیت $g(x,y)=0$ بدست آوریم در این روش λ به عنوان ضریب لاگرانژ در نظر گرفته می شود و تابع $F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ را به عنوان تابع لاگرانژ تعریف می کنیم و با حل دستگاه زیر نقاط ماکسیمم یا مینیمم بدست می آید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial x}-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial y}-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=-g(x,y)=g(x,y)=0 \end{cases}$$

مثال: ماکزیمم مقدار تابع $f(x,y)=y^2-x^2$ با شرط $x+2y=6$ را بدست آورید.

$$g(x,y)=x+2y-6=0$$
$$F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$
$$F(x,y)=y^2-x^2-\lambda(x+2y-6)$$
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=-2x+\lambda=0\Rightarrow x=\dfrac{\lambda}{2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y-2\lambda=0\Rightarrow y=-\lambda \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x+2y-6=0\Rightarrow \dfrac{\lambda}{2}-2\lambda-6=0\Rightarrow \lambda=-4 \end{cases}$$

بنابراین نقطه (۴و۲) نقطه بحرانی تابع تحت شرط مفروض می باشد.

$$x=\frac{\lambda}{2}=-2 \qquad ,y=-\lambda=+4$$

شرط کافی برای وجود ماکسیمم یا مینیمم توابع چند متغیره با محدودیت در صورتی که تابع دو متغیره $f(x,y)$ تحت شرط $g(x,y)=0$ داده شده باشد و $F(x,y,\lambda)$ تابع لاگرانرد معرفی شده باشد ثابت می شود شرط کافی برای وجود ماکسیمم یا مینیمم به صورت زیر است

الف) ماکسیمم است اگر

$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} \rangle 0$$

ب) مینیمم است اگر

$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} \langle 0$$

در مثال قبل آیا نقطه (۴و۲) ماکزیمم نسبی است.

$g_x = ۱ \qquad g_y = ۲ \qquad F_{xx} = -۲ \qquad F_{yy} = ۲$

$F_{xy} = ۰ \qquad F_{yx} = ۰$

$$\begin{vmatrix} ۰ & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} ۰ & ۱ & ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۲ & ۰ & ۲ & ۲ & ۰ \end{array}\right|$$

$= (۰ + ۰ + ۰) - (۲ - ۸) = +۶ \rangle ۰ \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی است

فصل ششم
معادلات دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل مربعه n

اگر y تابعی از x باشد. $F(x,y,y',....y^{(n)})=۰$ یک رابطه بین x و y و مشتقهای آن باشد رابطه F یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n گویند.

بیشترین مرتبه مشتق در معادله دیفرانسیل را مرتبه معادله دیفرانسیل و بیشترین توان بزرگترین مرتبه مشتق را درجه معادله دیفرانسیل گویند.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم درجه ۱ $\quad ۴y''+۳y-۶x=۰$

معادله دیفرانسیل مرتبه چهار درجه ۲ $\quad (\frac{d^۴y}{dx^۴})^۶+۳y''-۶y+۴x=۰$

معادله دیفرانسیل مرتبه ۵ درجه ۱ $\quad y^{(۵)}(۶x-۴)+۳xy'-\cos y=۰$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

در صورتی به هر $x\in I$، تابع $y=f(x)$ و مشتقهای آن در معادله $F(x,y,y',.....y^{(n)})=۰$ صدق کند. $y=F(x)$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل گویند.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=۸$ را بدست آورید

مجموعه جواب عمومی $y'=۸$ $\quad y'=\frac{dy}{dx}=۸\Rightarrow dy=۸dx\Rightarrow y=۸x+c$

چون c می تواند هر عدد دلخواه باشد جواب منحصر به فرد نیست در صورتی که شرایط اولیه داده شود جواب منحصر به فرد بدست می آید که به آن جواب خصوصی گویند.

مثال: جواب عمومی و خصوصی معادله دیفرانسیل $y'=-۵$ را با شرط اولیه $y(۱)=-۳$ را بدست آورید

جواب عمومی $\quad y'=\frac{dy}{dy}=-۵\Rightarrow dy=-۵dx\Rightarrow y=-۵x+c$ مختصات داده شده باید در جواب عمومی صدق کند.

$$y(۱)=-۳\Rightarrow -۳=-۵\times ۱+c\Rightarrow c=۲$$

جواب خصوصی $\quad \Rightarrow y=-۵x+۲$

مثال: در معادله $y'+\frac{y}{x}=۰$ $x\rangle ۰$ و با شرط اولیه $y(۱)=-۱$ جواب عمومی و خصوصی را بدست آوریدو

$$y'+\frac{y}{x}=۰\Rightarrow y'=-\frac{y}{x}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x}\Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$$

جواب عمومی

$$Lny=-cLnx\Rightarrow Lny=cLnx^{-۱}\Rightarrow y=\frac{C}{x}$$

جواب خصوصی $\quad y(۱)=-۱\Rightarrow -۱=\frac{C}{۱}\Rightarrow c=-۱\Rightarrow y=\frac{-۱}{x}$

مثال: معادله دیفرانسیل $y''-5y'-6y=0$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید هر یک از توابع $y_2=e^{6x}, y_1=e^{-x}$ جوابی از معادله دیفرانسیل فوق است

ب) نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی c_2, c_1 تابع $y=c_1e^{-x}+c_2e^{6x}$ جوابی از معادله دیفرانسیل فوق است

الف) بایستی جوابها در معادله صدق کنند.

اگر $y=e^{-x}\to y'=-e^{-x}\to y''=e^{-x}$

بنابراین جواب است $e^{-x}+5e^{-x}-6e^{-x}=0 \Rightarrow 0=0$

اگر $y=e^{6x}\to y'=6e^{6x}\to y''=36e^{6x}$

بنابراین جواب است $36e^{6x}-5(6e^{6x})-e^{6x}=0 \Rightarrow 0=0$

ب)

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{6x}\to y'=-c_1e^{-x}+6c_2e^{6x}\to y''=c_1e^{-x}+36c_2e^{6x}$$

$$(c_1e^{-x}+3c_2e^{6x})-5(-c_1e^{-x}+6c_2e^{6x})-6(c_1e^{-x}+c_2e^{6x})=0$$

بنابراین جواب است $\Rightarrow 0=0$

نکته: هر ترکیب خطی از جوابهای معادله دیفرانسیل یک جواب برای معادله دیفرانسیل است

نکته: برای بدست آوردن جوابهای عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه $ay''+by'+cy=0$ معادله درجه دوم $at^2+bt+c=0$ را تشکیل می دهیم در صورتی $\Delta\rangle 0$ باشد و A و B ریشه های معادله باشند در این صورت c_2e^{Bt}, c_1e^{At} و هر ترکیب خطی آنها جواب معادله دیفرانسیل است

مثال: جوابهای عمومی معادله دیفرانسیل $y''-3y'+2=0$ را بدست آورید.

$$3t^2-3t+2=0$$
$$\Delta=b^2-4\times a\times c\Rightarrow \Delta=3^2-4\times1\times2=1$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+3\pm\sqrt{1}}{2\times1}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=2\end{cases}$$
$$y_1=c_1e^{At}\Rightarrow y_1=e^{t}$$
$$y_2=c_2e^{Bt}\Rightarrow y_2=c_2e^{2t}$$

هر ترکیب خطی دو جواب بدست آمده نیز یک جواب عمومی برای معادله دیفرانسیل فوق است.

حل معادله دیفرانسیل:

۱- معادله دیفرانسیل جدایی پذیر

معادله دیفرانسیل $P(x)dx+q(y)dy=0$ که با انتگرال گیری مستقیم از طرفین معادله می توان جوابهای عمومی آن را بدست آورد معادله دیفرانسیل جدایی پذیر گویند

مثال: معادله دیفرانسیل $3x^2y^3dx-dy=0$ را حل کنید.

طرفین تقسیم بر y^3 $\qquad 3x^2y^2dx-dy=0$

$$3x^2dx-\frac{dy}{y^2}=0\Rightarrow\int 3x^2dx-\int\frac{dy}{y^2}=C\Rightarrow x^3+\frac{1}{2}y^{-1}=c$$

$$y^{-1}=c-x^3\Rightarrow y=\frac{1}{c-x^3}$$

معادله همگن:

در تابع دو متغیره $f(x,y)$ اگر به ازای هر t,y,x که (tx,ty) متعلق به قلمرو f باشد، داشته باشیم $f(tx,ty)=t^nf(x,y)$ در این صورت معادله فوق را معادله همگن مرتبه n گویند.

مثال: آیا معادله $f(x,y)=2x^2y^2-4x^4+6\frac{y^5}{x}$ همگن است.

$$f(tx,ty)=2(tx)^2(ty)^2-4(tx)^4+6\frac{(ty)^5}{(tx)}$$

$$=t^2\left[2x^2y^2-4x^4+6\frac{y^5}{x}\right]=t^4f(x,y)$$

بنابراین همگن از درجه ۴ می باشد.

نکته: مجموع توانهای هر جمله در چند جمله ای را درجه معادله همگن گویند.

۲- معادله دیفرانسیل همگن:

معادله دیفرانسیلی به فرم $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را اگر $M(x,y)$ و $N(x,y)$ توابعی همگن باشند معادله دیفرانسیل همگن گویند و با تغییر متغیر $dy=tdx+xdt, y=tx$ می توان آن را به معادله جدایی پذیر تبدیل کرد.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(y^3-3xy)dx+3x^3dy=0$$

$N(x,y)=3x^3, M(x,y)=y^3-3x^2y$ که هر دو همگن درجه ۳ هستند.

$$y=tx\Rightarrow dy=tdx+xdt$$

$$(t^3x^3-3tx^3)dx+3\qquad x^3(tdx+xdt)=0$$

$$t^3x^3dx+3x^4dt=0$$ طرفین بخش بر t^3x^4

$$\frac{dx}{x}+3\frac{dt}{t^3}=0$$

$$\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dt}{t^3}=c\Rightarrow Ln(x)+\frac{-3}{2t^2}=c$$

$$y=tx\Rightarrow t=\frac{y}{x}$$

$$Ln|x|-\frac{3}{2}\frac{x^2}{y^2}=c\Rightarrow Ln|x|-c=\frac{3}{2}\frac{x^2}{y^2}$$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y^{۲}=\frac{۲}{۳x^{۲}}\times\frac{۱}{Ln|x|-c}\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{۲}{۳x^{۲}(Ln|x|-c)}}$$

۳- معادله دیفرانسیل کامل:

هرگاه در معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=۰$ رابطه $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ برقرار باشد معادله دیفرانسیل را معادله دیفرانسیل کامل گویند.

قضیه:

معادله دیفرانسیل کامل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=۰$ دارای یک جواب به صورت $F(x,y)=c$ است که در آن $\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y),\frac{\partial N}{\partial x}=M(x,y)$ و c یک عدد ثابت است.

مراحل حل مسائل یک معادله دیفرانسیل کامل:

۱) از تابع $M(x,y)$ نسبت به x انتگرال می گیریم بنابراین y عدد ثابت فرض می شود.

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx=G(x,y)+f(y)$$

$F(y)$: تابعی بر حسب y است.

۲) از تابع $f(x,y)$ نسبت به y مشتق می گیریم و برابر $N(x,y)$ قرار می دهیم.

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial F(y)}{\partial (y)}=N(x,y)$$

$$\frac{\partial F(y)}{\partial y}=N(x,y)-\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}$$

۳)از تابع $\frac{\partial F(y)}{\partial y}$ نسبت به y انتگرال می گیریم تا برابر تابع $f(y)$ بدست آید.

$$\int \frac{\partial F(y)}{\partial y}dy=f(y)$$

۴- بنابراین جواب نهایی به صورت $F(x,y)=G(x,y)+f(y)=c$ می شود معادله دیفرانسیل $(xe^{y}+۳y^{۲})dy+e^{y}dx=۰$ را حل کنید . فرض $N(x,y)=xe^{y}+۳y^{۲}$ $M(x,y)=e^{y}$ باشد. چون اگر $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ باشد معادله دیفرانسیل کامل است.

$$\begin{cases}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=e^{y}\\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=e^{y}\end{cases}\Rightarrow \text{دیفرانسیل کامل است}$$

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx=\int e^{y}dx=xe^{y}+f(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)\Rightarrow xe^{y}+f'(y)=xe^{y}+۳y^{۲}\Rightarrow f'(y)=۳y^{۲}$$

$$F(y)=\int ۳y^{۲}dy=y^{۲}+c\Rightarrow F(x,y)=xe^{y}+y^{۲}+c$$

۴- معادلات خطی مرتبه اول:

الف- معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول:

معادله دیفرانسیل به فرم $y' + P(x)y = q(x)$ را معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول گویند که جواب عمومی آن به صورت $y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$ است که در آن $q(x),p(x)$ توابعی از x می باشند.

مثال: معادله دیفرانسیل $x^{۲}y' - ۳xy = x^{۳}$ را حل کنید.

طرفین بخش بر $x^{۲}$ تا به فرم معادله دیفرانسیل کامل درآید.

$$y' - \frac{۳}{x}y = x$$

$$p(x) = -\frac{۳}{x}, q(x) = x$$

$$\int p(x)dx = \int \frac{-۳}{x}dx = -۳Lnx = Lnx^{-۳}$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{Lnx^{-۳}} = x^{-۳} = \frac{۱}{x^{۳}}, e^{-\int P(x)dx} = e^{-Lnx^{-۳}} = e^{Lnx^{۳}} = x^{۳}$$

$$\int q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int x\frac{۱}{x^{۳}}dx = \int x^{-۲}dx = -\frac{۱}{x} + c$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} + c\right]$$

$$\Rightarrow y = x^{۳}\left[-\frac{۱}{x} + c\right] = -x^{۲} + cx^{۳}$$

ب) معادله برنولی:

معادله دیفرانسیل $y' + p(x)y = q(x)y^{n}$ را که در آن n هر عدد حقیقی بجز ۰ و یک باشد را معادله برنولی گویند. که با قرار دادن $z = y^{۱-n}$ معادله برنولی به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول نسبت به z,x تبدیل می شود.

مثال: معادله $y' - \frac{۳}{x}y = ۲x^{۲}y^{۴}$ را حل کنید.

$$P(x) = -\frac{۳}{x} \qquad q(x) = ۲x^{۲} \qquad n = ۴$$

بنابراین با تغیر $z = y^{۱-۴} = y^{-۳}$ به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول تبدیل می شود.

$$z' = (y^{-۳})' = -۳y^{-۴}y' \Rightarrow y^{-۴}y' = -\frac{۱}{۳}z'$$

طرفین بخش بر $y^{۴}$

$$y' - \frac{۳}{x}y = ۲x^{۲}y^{۴}$$

$$y^{-۴}y' - \frac{۳}{x}y^{-۳} = ۲x^{۲}$$

$$-\frac{۱}{۳}z' - \frac{۳}{x}z = ۲x^{۲} \Rightarrow z' + \frac{۹}{x}z = -۶x^{۲}$$

$$P(x) = \frac{۹}{x} \qquad q(x) = -۶x^{۲}$$

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{۹}{x}dx} = e^{-۹Lnx} = e^{Lnx^{۹}} = x^{-۹}$$

$$e^{\int P(x)dx} = x^{+۹}$$

$$\int q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int -۶x^{۲}x^{۹}dx = -\frac{۱}{۲}x^{۱۲}$$

$$Z = x^{-۹}(-\frac{۱}{۲}x^{۱۲} + c) = -\frac{۱}{۲}x^{۳} + cx^{-۹}$$

با قرار دادن $z = y^{-۳}$

$$y^{-۳} = -\frac{۱}{۲}x^{۳} + cx^{-۹}$$

نیمسال اول ۸۵-۸۴ زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۵۰ دقیقه تشریحی ۷۰

۱. اگر A یک ماتریس متعامد باشد. کدام گزینه درست است؟

الف. $A^TA = I$ ب. $A^{-1} = A^T$ ج. $(A^T)^{-1} = A$ د. هر سه مورد

۲.اگر C,B,A ماتریسهای $n\times n$ باشند. کدام گزینه صحیح است؟

الف. $[(A+B)C]^T = (A+B)^T C^T$ ب. $(A^TB+C)^T = B^TA+C^T$

ج. $(AB+C)^T = C^T + A^T \times B^T$ د. $(A+B^TC^T)^T = A^T + BC$

۳. اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{-\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ باشد. A ماتریسی است:

الف.متعامد ب. متقارن ج.شبه متقارن د. اسکالر

۴.اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد. ماتریس الحاقی A کدام است؟ $(AdjA)$

الف. $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$

۵.اگر $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}, A^{-۱}$ کدام است؟

الف. $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۴ & -۵ \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۱ & -۵ \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۱ & -۵ \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} -۵ & -۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۶.در مورد دستگاه $\begin{cases} X+۲Y=۲ \\ ۲X-Y+Z=-۳ \end{cases}$ کدام گزینه صحیح است؟ دستگاه:

الف.یک جواب دارد ب. ناسازگار است ج.جواب ندارد د. بی نهایت جواب دارد

۷. کدام گزینه صحیح است؟ مجموعه

الف) $\{(۲,۱),(۰,۲)\}$ مستقل خطی است. ب) $\{(۳,۲),(-۱,۰),(۱,۲)\}$ مستقل خطی است.

ج) $\{(۱,۲),(۰,۰)\}$ مستقل خطی است. د) $\{(۱,۱),(-۱,-۱)\}$ مستقل خطی است.

۸. به ازای کدام مقدار k دستگاه $\begin{cases} x-y+z=0 \\ kx+2y-z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$ جواب غیر بدیهی دارد؟

الف. $k=-1$ ب. $k=-2$ ج. $k=1$ د. $k=2$

۹.کدامیک از توابع زیر (تابع $f:R^2 \to R^3$) یک تابع خطی است؟

الف) $f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_1+2x_2 \\ 2x_1-x_2 \end{bmatrix}$ ب) $f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1x_2 \\ x_1+x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

ج) $f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2\sin x_1 \\ x_1-x_2 \\ x_1+x_2 \end{bmatrix}$ د) $f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1-x_2 \\ 2x_1+x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

۱۰. کدام ناحیه دامنه تابع $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{-y}$ را نشان می دهد؟

الف. اول   ب. دوم   ج.سوم   د. چهارم

۱۱. نقطه بحرانی تابع $f(x,y)=3x^2+2y^2-3x+2$ کدام است؟

الف. $(\frac{-1}{2},0)$ ب. $(0,\frac{-1}{2})$ ج. $(\frac{1}{2},0)$ د. $(0,\frac{1}{2})$

۱۲. اکسترمم تابع $f(x,y)=x^2-3xy-y^2$ تحت قید $x+y=6$ در کدام نقطه بدست می آید؟

الف. $(2,4)$ ب. $(1,5)$ ج. $(6,0)$ د. $(3,3)$

۱۳. در تابع $f(x,y)=2\sqrt{x}+e^y$ مقدار دیفرانسیل کل f به ازای $dx=dy=0/1, y=0, x=1$ کدام است؟

الف.۰/۱   ب. ۰/۲   ج.۰/۳   د. ۰/۴

۱۴. مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

الف. $\lambda_1=1, \lambda_2=3$ ب. $\lambda_1=-1, \lambda_2=3$ ج. $\lambda_1=1, \lambda_2=-3$ د. $\lambda_1=0, \lambda_2=-1$

۱۵. اگر $\lambda=2$ یک مقدار ویژه برای ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ باشد. بردار ویژه وابسته به λ کدام است؟

الف. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

۱۶. حاصل انتگرال $\int \frac{x^{3}-1}{x-1}dx$ کدام است؟

الف) $\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{2}}{2}+x+c$
ب) $\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{2}}{2}-x+c$
ج) $\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{2}}{2}-x+c$
د) $\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{2}}{2}+x+c$

۱۷. حاصل انتگرال معین $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx$ برابر است با:

الف. ۰
ب. ۱
ج. ۲
د. ۱-

۱۸. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,\frac{\pi}{2},\pi)} \frac{\sin(x+y+z)}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}$ کدام است؟

الف. $\frac{-4}{5\pi^{2}}$
ب. $\frac{4}{5\pi^{2}}$
ج. $\frac{5}{4\pi^{2}}$
د. $\frac{-5}{4\pi^{2}}$

۱۹. مرتبه معادله دیفرانسیل $(\frac{d^{3}y}{dx^{3}})^{2}+6x\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+y\frac{dy}{dx}=1$ کدام است؟

الف. ۱
ب. ۲
ج. ۳
د. ۶

۲۰. $y=e^{kx}+c$ جواب عمومی کدام معادله دیفرانسیل است؟

الف) $ky'+y=ck$
ب) $ky'-y=ck$
ج) $ky-y'=ck$
د) $ky+y'=ck$

سوالات تشریحی

۱. ماتریس $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}$ داده شده است.

الف. $\det A$ و ماتریس A^{2} را بدست آورید.

ب. نشان دهید. $A=A^{-1}=-\operatorname{adj}(A)$

۲. دستگاه مقابل را به روش کرامر حل کنید.
$$\begin{cases}2x-y-z=0\\ x+y+z=3\\ 3x+4y+z=8\end{cases}$$

۳. در تابع $f(x,y)=e^{x+y}+e^{x-y}$ مقدار $A=f_{xx}(0,0)+f_{yy}(0,0)+2f_{xy}(0,0)$ را محاسبه کنید.

۴. نقاط ماکزیمم و مینیمم یا زین اسبی تابع $f(x,y) = y^{۳} - ۱۲y - x^{۲} + ۶x + ۵$ را در صورت وجود بدست آورید.

۵. مقدار انتگرال معین $\int_{}^{\frac{\pi^{۲}}{۴}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ را محاسبه کنید.

پاسخ سوالات تستی

۱-گزینه (د) صحیح است.

در ماتریس متعامد $|A| = \pm۱, A^{-۱} = A^{T}$است.

۲- گزینه (ب) صحیح است. $\left[A^{T}B + C\right]^{T} = (A^{T}B)^{T} + C^{T} = B^{T}A + C^{T}$

۳- گزینه (الف) صحیح است. ماتریسهای دوران به صورت $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ماتریس دوران می باشد.

۴- گزینه (ب) صحیح است. کافی است در ماتریسهای ۲×۲ جای عناصر قطر اصلی را عوض کنیم و عناصر قطر فرعی را قرینه کنیم.

۵- گزینه (ج) صحیح است. $|A| = \begin{vmatrix} ۵ & ۴ \\ -۱ & -۱ \end{vmatrix} = (-۱)(۵) - (۴)(-۱) = -۵ + ۴ = -۱$

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ +۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\text{adj}A = \frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۱ & -۵ \end{bmatrix}$$

۶- گزینه (د) صحیح است. $|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} = -۱ - ۴ = -۵ \neq ۰$

$\left.\begin{matrix} r(A) = ۲ \\ r(A|b) = ۲ \end{matrix}\right\} r(A|B) = r(A) \langle n \Rightarrow$ دستگاه دارای بی نهایت جواب است

۷- گزینه (الف) صحیح است.

$\begin{vmatrix} ۰ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰\times۱ - ۲\times۲ = -۴ \neq ۰ \Rightarrow$ مستقل خطی است

۸- گزینه (ب) صحیح است. شرط آنکه دستگاه دارای جواب غیر بدیهی باشد آن است که دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر شود.

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ k & ۲ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow (۴+۱-k)-(-۲k+۱+۲)=۰ \Rightarrow k=-۲$$

۹- گزینه (د) صحیح است.

۱۰- گزینه (د) صحیح است. $\sqrt{x}\rangle ۰ \Rightarrow x\rangle ۰ \quad , \quad \sqrt{-y}\rangle ۰ \Rightarrow y\langle ۰$ ناحیه ی اشتراک ناحیه ی چهارم است.

۱۱- گزینه (ج) صحیح است.

$$\begin{cases} f_x = ۰ \\ f_y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶x-۳=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲} \\ ۴y=۰ \Rightarrow y=۰ \end{cases}$$

۱۲- گزینه (ب) صحیح است.

$$F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x^۲-۳xy-y^۲-\lambda[x+y-۶]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=۰ \Rightarrow ۲x-۳y-\lambda=۰ \\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=۰ \Rightarrow -۳x-۲y-\lambda=۰ \\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial \lambda}=۰ \Rightarrow x+y-۶=۰ \Rightarrow x=۶-y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲(۶-y)-۳y-\lambda=۰ \\ -۳(۶-y)-۲y-\lambda=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۲-۵y-\lambda=۰ \\ -۱۸+y-\lambda=۰ \end{cases} \Rightarrow ۳۰-۶y=۰ \Rightarrow y=۵, x=۱$$

۱۳- گزینه (ب) صحیح است.

$$df = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.dy$$

$$df=\frac{۲}{۲\sqrt{x}}\times dx+e^y.dy=۰/۱+e^۰\times ۰/۱=۰/۲$$

۱۴- گزینه (الف) صحیح است.

روش اول $\lambda^۲-tr(A)\lambda+|A|=۰ \Rightarrow \lambda^۲-۴\lambda+۳=۰ \Rightarrow (\lambda-۱)(\lambda-۳)=۰ \Rightarrow \lambda_۱=۱, \lambda_۲=۳$

روش دوم $|A-\lambda I|=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} ۳-\lambda & -۱ \\ ۰ & ۱-\lambda \end{vmatrix}=۰ \Rightarrow (۳-\lambda)(۱-\lambda)=۰ \Rightarrow \lambda_۱=۱, \lambda_۲=۳$

روش تستی: در ماتریسهای مثلثی و قطری مقادیر ویژه عناصر روی قطر اصلی هستند

۱۵- گزینه (ج) صحیح است.

$$[A-\lambda I]\bar{X}=۰$$

$$\begin{bmatrix} -۱-\lambda & ۳ \\ -۲ & ۴-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -۳ & ۳ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=۰ \begin{cases} -۳x+۳y=۰ \\ -۲x+۲y=۰ \end{cases} \Rightarrow x=y$$

۱۶- گزینه (د) صحیح است.

$$\int \frac{x^{۳}-۱}{x-۱}dx = \int (x^{۲}+x+۱)dx = \frac{۱}{۳}x^{۳}+\frac{۱}{۲}x^{۲}+x+c$$

$$\begin{array}{l|l} x^{۳}-۱ & x-۱ \\ \cline{2-2} & x^{۲}+x+۱ \\ \underline{{}_{-}x^{۳}{}_{+}^{-}x^{۲}} & \\ x^{۲}-۱ & \\ \underline{{}_{-}x^{۲}{}_{+}^{-}x} & \\ x-۱ & \\ \underline{{}_{-}x{}_{+}^{-}۱} & \\ ۰ \quad ۰ & \end{array}$$

۱۷- گزینه (الف) صحیح است.

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (\cos x - \sin x)dx = \sin x + \cos x \Big]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = ۱-۱=۰$$

۱۸- گزینه (الف) صحیح است.

$$\lim_{(x,y,z)\to(۰,\frac{\pi}{۲},\pi)} \frac{\sin(x+y+z)}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} = \frac{\sin(۰+\frac{\pi}{۲}+\pi)}{۰+\frac{\pi^{۲}}{۴}+\pi^{۲}} = \frac{-۱}{\frac{۵\pi^{۲}}{۴}} = \frac{-۴}{۵\pi^{۲}}$$

۱۹- گزینه (ج) صحیح است. معادله ی دیفرانسیل مرتبه ۳ و درجه ی ۲ است.

۲۰- گزینه (ج) صحیح است.

جواب معادله ی دیفرانسیل در معادله دیفرانسیل باید صدق کند بنابراین در تک تک گزینه ها قرار داده جواب را بدست می آوریم.

$$y = e^{kx}+c \Rightarrow y' = ke^{kx}$$

در گزینه (ج) بررسی می کنیم $ky - y' = ck \Rightarrow k(e^{kx}+c) - ke^{kx} = ke^{kx}+kc-ke^{kx} = kc$

پاسخ سوالات تشریحی

۱- الف- ستون دوم و سوم را جمع می کنیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۳ & -۲ & ۳ \\ ۲ & -۲ & ۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & ۱+-۱ & -۱ \\ ۳ & -۲+۳ & ۳ \\ ۲ & -۲+۳ & ۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۳ & +۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-۱)^{۳+۱} \times (-۱)\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} = -۱$$

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۳ & -۲ & ۳ \\ ۲ & -۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۳ & -۲ & ۳ \\ ۲ & -۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱-ب-

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} AdjA \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{-۱} AdjA = -AdjA$$

-۲

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۲ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۱ \end{vmatrix} = -۹ \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} ۰ & -۱ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۸ & ۴ & ۱ \end{vmatrix} = -۹$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۸ & ۱ \end{vmatrix} = -۹ \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۸ \end{vmatrix} = -۹$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-۹}{-۹} = ۱ \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-۹}{-۹} = ۱ \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-۹}{-۹} = ۱$$

-۳

$$f_x(x,y) = e^{x+y} + e^{x-y} + \qquad f_y = e^{x+y} - e^{x-y} \qquad f_{xy} = e^{x+y} - e^{x-y}$$

$$f_{xx} = e^{x+y} + e^{x-y} \qquad f_{yy} = e^{x+y} + e^{x-y}$$

$$f_{xx}(۰,۰) = ۱+۱ = ۲ \qquad f_{yy}(۰,۰) = ۱+۱ = ۲ \qquad f_{xy}(۰,۰) = ۱+۱ = ۲$$

$$A = f_{xx}(۰,۰) + f_{yy}(۰,۰) + ۲f_{xy}(۰,۰) = ۲+۲+۲\times۲ = ۸$$

-۴

$$\begin{cases} f_x = -۲x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ f_y = ۳y^۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow y \pm ۲ \end{cases}$$

نقاط بحرانی (۲و۳) و (۲-و۳) است.

$$f_{xx} = -۲$$
$$f_{yy} = ۶y$$
$$f_{xy} = ۰$$

$$\Delta_۱^{(۳,۲)} = f_{xx}^{(۳,۲)} f_{yy}^{(۳,۲)} - \left[f_{xy}^{(۳,۲)}\right]^۲ = (-۲)(۶\times۲) - ۰^۲ = -۲۴ \langle ۰$$

نتیجه ای برای نقطه (۲و۳) نمی توان گرفت.

$$\Delta_{۲}^{(۳,-۲)} = f_{xx}^{(۳,-۲)} f_{yy}^{(۳,-۲)} - \left[f_{xy}^{(۳,-۲)}\right]^{۲} = -۲\times(۶\times-۲)-۰=+۲۴\rangle۰$$

چون $\Delta\rangle۰$ و $f_{xx}\langle۰$ است بنابراین نقطه (۲-و۳) نقطه ی ماکزیمم است.

۵- $$\int_{۰}^{\frac{\pi^{۲}}{۴}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = ۲\int_{۰}^{\frac{\pi^{۲}}{۴}} \frac{\cos\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}}dx = ۲\sin\sqrt{x}\Big]_{۰}^{\frac{\pi^{۲}}{۴}} = ۲\sin\frac{\pi}{۲} - ۲\sin۰ = ۲$$

نیمسال دوم ۸۵-۸۴ زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

۱. مقدار دترمینان، ماتریس $A=\begin{bmatrix} x & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ به ازای چه مقدار از x برابر صفر است؟

الف.۲ ب. ۱ ج.صفر د. ۳-

۲. اگر $A^{۲}=۲I$، آنگاه معکوس ماتریس A کدام است؟

الف. $A^{-۱}=\frac{A}{۲}$ ب. $A^{-۱}=۲A$ ج. $A^{-۱}=-\frac{A}{۲}$ د. $A^{-۱}=-۲A$

۳. اگر A یک ماتریس مربعی باشد کدام گزینه <u>نادرست</u> است؟

الف. $|A^{T}|=|A|$ ب. $|AB|=|A||B|$ ج. $|A+B|=|A|+|B|$ د. $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$

۴. رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ کدام است؟

الف.صفر ب. ۱ ج.۲ د. ۳

۵. سه بردار $(۱,۲,۳),(k,۱,۰),(۱,۱,۱)$ به ازای کدام مقدار k مستقل خطی <u>نیستند</u>.

الف.$k\neq ۱$ ب. $k=۱$ ج. $k=۲$ د. $k\neq ۲$

۶. اگر معکوس ماتریس مربعی A برابر $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس الحاقی A برابر است با:

الف. $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۷. اگر $f(x,y,z)=x^{۲}-y^{۲}-z$ و $g(x,y,z)=x+y+z$ آنگاه $(g-۴\frac{f}{g})(۰,۱,۰)$ کدام است؟

الف.۵ ب. ۵- ج.۱۰ د. ۱۰-

۸. تابع f با ضابطه $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy+x^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$ در نقطه (۰و۰)

الف. ناپیوسته است ب. دارای حدصفر است ج. دارای حد یک است د. پیوسته است

۹. فرض کنید $f(x,y)=\frac{۲x}{x-y}$، مقدار $f_x(۳,۱)$ و $f_y(۳,۱)$ بترتیب کدام است؟

الف. $-\frac{۲}{۴},\frac{-۳}{۲}$ ب. $\frac{۲}{۴},-\frac{۳}{۲}$ ج. $-\frac{۲}{۴},\frac{۳}{۲}$ د. $\frac{۲}{۴},\frac{۳}{۲}$

۱۰. اگر $f(x,y)=x+Ln(x^۲+y^۲)$، دیفرانسیل کل تابع وقتی $dx=۱$ و $dy=-۱$ و $x=۲$ و $y=۳$ برابر است با:

الف. $\frac{۱۱}{۱۳}$ ب. $-\frac{۱۱}{۱۳}$ ج. $\frac{۱۳}{۱۱}$ د. $-\frac{۱۳}{۱۱}$

۱۱. حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{xy^۲}{x^۲y+۲x}$ کدام است؟

الف.۱- ب. ۲ ج.۱+ د. ۰

۱۲. حاصل حد $\lim\limits_{x\to۰}\frac{\int_۰^x\frac{\sin t}{t}dt}{x}$ کدام است؟

الف.۱ ب. ۱- ج.۲ د. ۲-

۱۳. فرض کنید $F(x)+c=\int\frac{x}{\sqrt{x+۱}}dx$ در صورتیکه $C=۰$ فرض شود، مقدار انتگرال به ازای $x=۰$ کدام است؟

الف. $\frac{۱}{۲}$ ب. $\frac{۴}{۳}$ ج. $-\frac{۴}{۳}$ د. $-\frac{۱}{۲}$

۱۴. دستگاه $\begin{cases}x+۲ay=۰\\x+۴y=۰\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a جوابهای بی شمار دارد؟

الف.۲- ب. ۱- ج.۱ د. ۲۵

۱۵. در ماتریس $\begin{bmatrix}۲&۳\\۴&۵\end{bmatrix}$، مجموع مقادیر ویژه کدام است؟

الف.۲ ب. ۳ ج.۴ د. ۷

۱۶. حاصل انتگرال $\int_۱^۴\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)}$ برابر است با:

الف. $\frac{۱}{۳}$ ب. $۲Ln\frac{۳}{۲}$ ج. $Ln\frac{۳}{۲}$ د. $-\frac{۱}{۳}$

۱۷. کدام تابع خطی است؟

الف. $f:R^3 \to R^3$ $\quad f\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 5x_1+1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$

ب. $f:R^2 \to R^4$ $\quad y\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2+1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ج. $h:R^3 \to R^2$ $\quad h\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$

د. $w:R^3 \to R^3$ $\quad w\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

۱۸. کدام عبارت درست است؟ (A ماتریس $n\times n$است)

الف. $r(I_n) = n-1$

ب. $r(A)=n$اگر و تنها اگر A وارون ناپذیر باشد.

ج. $r(A)=n$اگر و تنها اگر $\det(A)=0$

د. $r(A)\langle n$اگر و تنها اگر $\det(A)=0$

۱۹. اگر A یک ماتریس 2×2 و چند جمله ای ویژه آن بصورت $\lambda^2+3\lambda+2$باشد، دترمینان A کدام است؟

الف.۱ ب. ۲ ج.۳ د. ۴

۲۰.جواب معادله دیفرانسیل مقابل کدام است $y''+4y=0$

الف. $\sin 2x$ ب. $-\frac{1}{4}x^2$ ج. Cx^2 د. Cx

سؤالات تشریحی

۱. با استفاده از اعمال سطری وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۴ & -۳ & -۳\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۴ & ۴ & ۳\end{bmatrix}$ را بدست آورید و نشان دهید $adjA = A$ و $A^{-۱} = A$ است.

۲. به ازای چه مقداری از K، دستگاه زیر دارای یک جواب منحصر بفرد است.

$$\begin{cases} x+y-z=۳ \\ kx-y+۲z=۵ \\ x+۲y-z=۴ \end{cases}$$

۳. فرض کنید $f(x,y,z)=x^۲y+y^۲z+z^۲x$ نشان دهید.

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}=(x+y+z)^۲$$

۴. در کارخانه ای دو نوع اتومبیل به تعداد x و y تولید می شود. تابع هزینه تولید این دو نوع اتومبیل عبارت است از: $f(x,y)=x^۲-xy+۲y^۲$

برای به حداقل رسانیدن هزینه، چند اتومبیل از هر نوع باید تولید شود، در صورتیکه مجموع تعداد اتومبیلهای تولید شده برابر ۸ باشد.

۵. مساحت ناحیه محصور به منحنی های $y=x^۲$ و $y=x^۳$ رابدست آورید.

پاسخ سؤالات تستی:

۱- گزینه (ب) صحیح است.

$$|A|=۰\Rightarrow \left|\begin{matrix} x & ۲ & ۲\\ ۱ & ۰ & ۲\\ ۱ & ۱ & ۲\end{matrix}\right|\begin{matrix} x & ۲\\ ۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{matrix}=(۰+۴+۲)-(۴+۲x-۰)=۲-۲x=۰\Rightarrow x=۱$$

۲- گزینه (الف) صحیح است.

$$A^۲=۲I\Rightarrow A^{-۱}A^۲=۲A^{-۱}I\Rightarrow A=۲A^{-۱}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{A}{۲}$$

۳- گزینه (ج) صحیح است.

۴- گزینه (ج) صحیح است.

$$R_۳-۲R_۲\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=R_۲-R_۱\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow$$

تعداد عناصر مخالف صفر روی قطر اصلی رتبه ماتریس است.

۵- گزینه (ج) صحیح است.

$$|U| = \cdot \Rightarrow \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ k & ۱ & \cdot \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix} \begin{matrix} ۱ & ۱ \\ k & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{matrix} = (۳ + \cdot + ۲k) - (۳k + \cdot + ۱) = ۲ - k = \cdot \Rightarrow k = ۲$$

۶- گزینه (د) صحیح است.

می دانیم دترمینان ماتریس مثلثی برابر حاصل ضرب عناصر قطر اصلی است.

$$|A^{-۱}| = ۱ \times ۱ \times ۱ = ۱$$

$$|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|} \Rightarrow |A| = ۱$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\operatorname{adj}A \Rightarrow A^{-۱} = \operatorname{adj}A = \begin{bmatrix} ۱ & \cdot & \cdot \\ -۱ & ۱ & \cdot \\ ۱ & \cdot & ۱ \end{bmatrix}$$

۷- گزینه (الف) صحیح است.

$$g - ۴\frac{f}{g} = (\cdot + ۱ + \cdot) - ۴ \times \frac{\cdot^{۲} - ۱^{۲} - \cdot^{۲}}{\cdot + ۱ + \cdot} = ۱ + ۴ = +۵$$

۸- گزینه (الف) صحیح است.

$$\lim_{x \to \cdot}\left[\lim_{y \to \cdot} f(x,y)\right] = \lim_{x \to \cdot}\left[\frac{\cdot + x^{۲}}{x^{۲} + \cdot^{۲}}\right] = ۱$$

$$\lim_{y \to \cdot}\left[\lim_{x \to \cdot} f(x,y)\right] = \lim_{y \to \cdot}\left[\frac{\cdot + \cdot}{\cdot \ + y^{۲}}\right] = \cdot$$

تابع دارای حد نیست بنابراین پیوسته نیست

۹- گزینه (ج) صحیح است.

$$f_x^{(۳,۱)} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{۲(x-y) - ۱ \times ۲x}{(x-y)^{۲}} = \frac{-۲y}{(x-y)^{۲}} = \frac{-۲}{(۳-۱)^{۲}} = -\frac{۲}{۴}$$

$$f_y^{(۳,۱)} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\cdot - (-۱)(۲x)}{(x-y)^{۲}} = \frac{۲x}{(x-y)^{۲}} = \frac{۲ \times ۳}{(۳-۱)^{۲}} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

۱۰- گزینه (الف) صحیح است.

$$df = \frac{\partial f^{(x,y)}}{\partial x}.dx + \frac{\partial f^{(x,y)}}{\partial y}dy = (۱ + \frac{۲x}{x^{۲} + y^{۲}})dx + (\frac{۲y}{x^{۲} + y^{۲}})dy$$

$$df = (۱ + \frac{۲ \times ۲}{۲^{۲} + ۳^{۲}}) \times ۱ + (\frac{۲ \times ۳}{۲^{۲} + ۳^{۲}}) \times -۱ = \frac{۱۷}{۱۳} - \frac{۶}{۱۳} = \frac{۱۱}{۱۳}$$

۱۱- گزینه (د) صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰}\left[\lim_{y\to ۰} f(x,y)\right]=\lim_{x\to ۰}[\cdot]=۰$$

$$\lim_{y\to ۰}\left[\lim_{x\to ۰} f(x,y)\right]=\lim_{y\to ۰}[\cdot]=۰$$

۱۲- گزینه (الف) صحیح است.

۱۳- گزینه (ج) صحیح است.

$$\sqrt{x+۱}=U\Rightarrow x+۱=U^{۲}\Rightarrow x=U^{۲}-۱\Rightarrow dx=۲UdU$$

$$x=۰\Rightarrow U=۱$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{x+۱}}dx=\int\frac{U^{۲}-۱}{U}۲UdU=۲\int(U^{۲}-۱)dU=۲\left[\frac{۱}{۳}U^{۳}-U\right]=\frac{۲}{۳}U^{۳}-۲U=\frac{۲}{۳}-۲=-\frac{۴}{۳}$$

۱۴- گزینه (الف) صحیح است.

$$|A|=\begin{vmatrix}۱ & ۲a\\ ۱ & ۴\end{vmatrix}=۰\Rightarrow ۴-۲a=۰\Rightarrow a=۲$$

۱۵- گزینه (د) صحیح است.

می دانیم اثر ماتریس برابر مجموع مقادیر ویژه است

$$tr(A)=\sum\lambda_i=۲+۵=۷$$

۱۶- گزینه (ج) صحیح است.

$$U=\sqrt{x}+۱\Rightarrow dU=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx$$

$$\int_۱^۴\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x+۱})}=۲\int_۱^۴\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}\ dx\ =۲Ln(\sqrt{x}+۱)]_۱^۴$$

$$۲\left[Ln(\sqrt{۴}+۱)\right]-\left[۲Ln\sqrt{۱}+۱\right]=۲\left[Ln۳-Ln۲\right]=۲Ln\frac{۳}{۲}$$

۱۷- گزینه (د) صحیح است.

۱۸- گزینه (د) صحیح است.

۱۹- گزینه (ب) صحیح است.

می دانیم معادله ی مشخصه ماتریس ۲×۲ به صورت $\lambda^{۲}-trA\lambda+|A|=۰$ است بنابراین گزینه (ب) صحیح است.

۲۰- گزینه (الف) صحیح است.

جواب معادله دیفرانسیل صدق می کند بنابراین

$$y=\sin۲x,\ y'=۲\cos۲x,\ y''=-۴\sin۲x$$

$$y''+۴y=۰\Rightarrow -۴\sin۲x+۴\sin۲x=۰$$

پاسخ سؤالات تشریحی

۱-بایستی $[A|I]$ را به $[I|\overline{A}]$ تبدیل کنیم.

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}-۴&-۳&-۳&۱&۰&۰\\ ۱&۰&۱&۰&۱&۰\\ ۴&۴&۳&۰&۰&۱\end{array}\right] R_۱ \underset{\leftarrow}{\rightarrow} R_۲ \left[\begin{array}{ccc|ccc}۱&۰&۱&۰&۱&۰\\ -۴&-۳&-۳&۱&۰&۰\\ ۴&۴&۳&۰&۰&۱\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}R_۳+R_۲\rightarrow R_۲\\ \\ R_۳-۴R_۱\rightarrow R_۳\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}۱&۰&۱&۰&۱&۰\\ ۰&۱&۰&۱&۰&۱\\ ۰&۴&-۱&۰&-۴&۱\end{array}\right]\xrightarrow{R_۳-۴R_۲\rightarrow R_۳}\left[\begin{array}{ccc|ccc}۱&۰&۱&۰&۱&۰\\ ۰&۱&۰&۱&۰&۱\\ ۰&۰&-۱&-۴&-۴&-۳\end{array}\right]$$

$$-R_۳\rightarrow R_۳\left[\begin{array}{ccc|ccc}۱&۰&۱&۰&۱&۰\\ ۰&۱&۰&۱&۰&۱\\ ۰&۰&۱&۴&۴&۳\end{array}\right]\xrightarrow{R_۱-R_۳\rightarrow R_۱}\left[\begin{array}{ccc|ccc}۱&۰&۰&-۴&-۳&-۳\\ ۰&۱&۰&۱&۰&۱\\ ۰&۰&۱&۴&۴&۳\end{array}\right]$$

نسبت به سطر دوم بسط می دهیم

$$|A|=(-۱)^{۲+۱}\times\begin{vmatrix}-۳&-۳\\ ۴&۳\end{vmatrix}+(-۱)^{۲+۲}\times۰\times\begin{vmatrix}-۴&-۳\\ ۴&۳\end{vmatrix}+(-۱)^{۳+۲}\times۱\times\begin{vmatrix}-۴&-۳\\ ۴&۴\end{vmatrix}$$

$$|A|=-۳+۰+۴=+۱$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\mathrm{adj}A\Rightarrow A^{-۱}=\mathrm{adj}A$$

همانگونه که مشاهده می شود $A^{-۱}=A$ است بنایراین $A^{-۱}=A$ است و چون $|A|=۱$ است بنابراین:

$$A^{-۱}=A=\mathrm{adj}A$$

۲-بایستی دترمینان ضرائب مخالف صفر باشد.

$$|A|\neq۰\Rightarrow\begin{vmatrix}۱&۱&-۱\\ k&-۱&۲\\ ۱&۲&-۱\end{vmatrix}=$$

$$=(-۱)^{۱+۱}\times۱\times\begin{vmatrix}-۱&۲\\ ۲&-۱\end{vmatrix}+(-۱)^{۱+۲}\times۱\times\begin{vmatrix}k&۲\\ ۱&-۱\end{vmatrix}+(-۱)^{۱+۳}\times(-۱)\times\begin{vmatrix}k&-۱\\ ۱&۲\end{vmatrix}=$$

$$=-۳+k+۲-۲k-۱\neq۰\Rightarrow-۲-k\neq۰\Rightarrow k=-۲$$

۳-

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۲xy+z^۲ \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x^۲+۲yz \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=y^۲+۲zx$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}=x^۲+y^۲+z^۲+۲xy+۲yz+۲zx=(x+y+z)^۲$$

-۴

$$x+y=۸\Rightarrow x+y-۸=۰$$

$$g(x,y)=x+y-۸=۰$$

$$F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,g)=x^۲-xy+۲y^۲-\lambda(x+y-۸)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=۲x-y-\lambda=۰ \\ \qquad\qquad \Rightarrow_{-۱\times}\begin{cases}۲x-y-\lambda=۰\\+x-۲y+\lambda=۰\end{cases}\Rightarrow ۳x-۳y=۰\Rightarrow x=y \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=-x+۲y-\lambda=۰ \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial \lambda}=x+y-۸=۰\Rightarrow x+x-۸=۰\Rightarrow ۲x=۸\Rightarrow x=۴, y=۴\end{cases}$$

-۵

$$g(x)=f(x)\Rightarrow x^۳=x^۲\Rightarrow x^۳-x^۲=۰\Rightarrow x^۲(x-۱)=۰\Rightarrow x=۰, x=۱$$

$$S=\int_۰^۱(x^۲-x^۳)dx=\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۱}{۴}x^۴\Big]_۰^۱=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۱۲}$$ واحد سطح

نیمسال اول ۸۶-۸۵ زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

۱.کدام یک از توابع زیر تابع اولیه ی $f(x)=Lnx$ می باشد؟

الف) $F(x)=xLnx+x+2$ ب) $F(x)=xLnx-x+5$

ج) $F(x)=xLnx$ د) $F(x)=Lnx+x-1$

۲.انتگرال نامعین $\int x\sqrt{x^2+1}dx$ برابر است با:

الف) $\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$ ب) $\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}+C$

ج) $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$ د) $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}+C$

۳. مقدار $\int_0^1 \frac{dx}{3x+1}$ برابر است با:

الف. $3Ln\frac{1}{4}$ ب. $3Ln\frac{1}{3}$ ج. $Ln3$ د. $\frac{1}{3}Ln4$

۴. مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx$ برابر است با:

الف. π ب. $\frac{\pi}{2}$ ج. $\frac{\pi}{4}$ د. $\frac{\pi}{3}$

۵. مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و خطوط $x=4, x=1$ برابر است با:

الف. $\frac{16}{3}$ ب. $\frac{8}{3}$ ج. $\frac{14}{3}$ د. $\frac{7}{3}$

۶. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$ ماتریس $A\times B$ برابر است با:

الف. $\begin{bmatrix}-1 & -2\\5 & 10\end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix}9\end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix}-1 & 5\\-2 & 10\end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 5\end{bmatrix}$

۷. مقدار $\begin{vmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\4 & -1 & 0 & 0\\3 & 5 & 2 & 0\\-1 & -2 & 3 & 1\end{vmatrix}$ برابر است با:

الف.۱ ب. ۲ ج. ۶- د. ۳

۸. مساحت محدود به نمودار توابع $y=x^{۳}, y=x^{۲}$ برابر است با:

الف. $\frac{۱}{۲۴}$ ب. $\frac{۱}{۱۲}$ ج. $\frac{۱}{۴}$ د. $\frac{۱}{۳}$

۹. کدام یک از ماتریس های زیر شبه متقارن است؟

الف. $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ -۵ & ۰ \end{bmatrix}$

۱۰. کدام یک از روابط زیر نادرست است؟

الف. $(A^{-۱})^{-۱}=A$ ب. $(AB)^T=B^TA^T$ ج. $\det \alpha A=\alpha^n \det A$ د. $\det \alpha A=|\alpha|\det A$

۱۱. کدام یک از مجموعه های زیر وابسته خطی اند؟

الف. $\{(۱,۲),(۲,۱)\}$ ب. $\{(۱,۲,۳),(۰,۰,۱)\}$ ج. $\{(۲,-۱),(-۲,۱)\}$ د. $\{(۵,۲,۷)\}$

۱۲.رتبه ی ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ برابر است با:

الف. ۲ ب. ۳ ج. ۱ د. صفر

۱۳. ماتریس نمایشگر تابع خطی $f(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} x_۳ \\ x_۲ \\ x_۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

الف. $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۱۴. حد تابع $f(x,y)=\frac{۲x^{۲}-۳y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}$ در نقطه ی $(۰,۰)$ برابر است با:

الف. ۲ ب. ۳- ج. صفر د. وجود ندارد

۱۵.کدام یک از توابع زیر در نقطه ی $(۰,۰)$ پیوسته است؟

الف)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy+x^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}} & ,(x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & ,(x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

ب)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x} & ,(x,y)\neq(۰,۰)\\ ۱ & ,(x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

ج)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}} & ,(x,y)\neq(۰,۰)\\ ۱ & ,(x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

د)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{۲x^{۳}}{x^{۲}+۳y^{۲}} & ,(x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & ,(x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

۱۶. تابع $f(x,y)=\sin(x^{۲}+y^{۳})$ را در نظر بگیرید، $\dfrac{\partial^{۲}f}{\partial x\partial y}$ برابر است با:

الف) $-۶xy^{۲}\cos(x^{۲}+y^{۳})$ ب) $۶x^{۲}y\sin(x^{۲}+y^{۳})$

ج) $-۶xy^{۲}\sin(x^{۲}+y^{۳})$ د) $۶x^{۲}y\cos(x^{۲}+y^{۳})$

۱۷.معادله ی دیفرانسیل $(\dfrac{d^{۲}y}{dx^{۲}})^{۳}+(\dfrac{dy}{dx})^{۲}+xy=۱$ از مرتبه ی چند است؟

الف.۶ ب. ۵ ج. ۲ د. ۱

۱۸. کدام یک از توابع زیر یک جواب خصوصی معادله ی دیفرانسیل $\dfrac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+۲\dfrac{dy}{dx}-۳y=۰$ می باشد؟

الف) $y=e^{x}+e^{-۳x}$ ب) $y=e^{-x}+e^{۳x}$

ج) $y=e^{۲x}+e^{-۳x}$ د) $y=e^{-۲x}+e^{۳x}$

۱۹. مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ -۴ & -۱\end{bmatrix}$ عبارتند از:

الف. ۱,۳− ب. ۳,۴− ج. ۳−,۱ د. ۳,۰

۲۰. کدام یک از بردارهای زیر، بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda=-۱$ ماتریس $\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}$ می باشد؟

الف. $\begin{bmatrix}-۲\\ ۴\end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix}۲\\ ۴\end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix}۴\\ ۲\end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix}-۴\\ ۲\end{bmatrix}$

سؤالات تشریحی

۱. انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

ب. $\int x^{۲}e^{-۳x}dx$

۲. بدون محاسبه ی دترمینان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

۳. با محاسبه ی ماتریس الحاقی (adj A)، وارون ماتریس A را بدست آورید:

$$A = \begin{vmatrix} ۱ & -۲ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۵ & -۴ \end{vmatrix}$$

۴. با استفاده از روش حذفی گاوس دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x_۱ - x_۲ + ۳x_۳ = ۲ \\ x_۱ + ۴x_۲ = -۱ \\ ۲x_۱ + ۶x_۲ - x_۳ = ۵ \end{cases}$$

۵. نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و زین اسبی تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$f(x,y) = x^{۳} - ۳xy + y^{۳}$$

پاسخ سؤالات تستی

۱- گزینه (ب) صحیح است.

$$U = Lnx \rightarrow dU = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \rightarrow V = x$$

انتگرال گیری جزء به جزء

$$\int Lnxdx = xLnx - \int x\frac{dx}{x} = xLnx - x + c$$

۲- گزینه (الف) صحیح است.

$$U = x^{۲} + ۱ \rightarrow dU = ۲xdx$$

$$\int x\sqrt{x^{۲}+۱}dx = \frac{۱}{۲}\int\sqrt{x^{۲}+۱}(۲xdx) = \frac{۱}{۲}\int U^{\frac{۱}{۲}}dU = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}U^{\frac{۱}{۲}+۱} + c$$

$$=\frac{۱}{۳}U^{\frac{۳}{۲}}+c=\frac{۱}{۳}(x^{۲}+۱)^{\frac{۳}{۲}}+c$$

۳- گزینه (د) صحیح است.

$$U=۳x+۱\rightarrow dU=۳dx$$

$$\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{۳x+۱}=\frac{۱}{۳}\int_{۰}^{۱}\frac{۳dx}{۳x+۱}=\frac{۱}{۳}\int_{۱}^{۴}\frac{dU}{U}=\frac{۱}{۳}LnU=\frac{۱}{۳}[Ln۴-Ln۱]=\frac{۱}{۳}Ln۴$$

۴- گزینه (ج) صحیح است.

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos^{۲}xdx=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(۱+\cos ۲x)dx=\frac{۱}{۲}\left[x+\frac{۱}{۲}\sin ۲x\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{\pi}{۴}$$

۵- گزینه (ج) صحیح است.

$$S=\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{۱}^{۴}\sqrt{x}dx=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}x^{۱+\frac{۱}{۲}}\Big]_{۱}^{۴}=\frac{۲}{۳}\left[x\sqrt{x}\right]_{۱}^{۴}=\frac{۲}{۳}[۸-۱]=\frac{۱۴}{۳}$$

۶- گزینه (ب) صحیح است.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۵\end{bmatrix}=-۱+۱۰=۹$$

۷- گزینه (ج) صحیح است. دترمینان ماتریس مثلثی برابر حاصل ضرب عناصر روی قطر اصلی است.

$$|A|=۳\times -۱\times ۲\times ۱=-۶$$

۸- گزینه (ب) صحیح است.

$$x^{۲}-x^{۳}=۰\Rightarrow x^{۲}(x-۱)=۰\Rightarrow x=۰,x=۱$$

$$S=\int_{۰}^{۱}(x^{۲}-x^{۳})dx=\frac{۱}{۳}x^{۳}-\frac{۱}{۴}x^{۴}\Big]_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۱۲}$$ واحد سطح

۹- گزینه (د) صحیح است. ماتریس شبه متقارن ماتریسی است که روی قطر اصلی عناصر آن صفر باشد و نسبت به قطر اصلی اعداد قرینه باشند.

۱۰- گزینه (د) صحیح است.

۱۱- گزینه (ج) صحیح است.

۱۲- گزینه (ب) صحیح است. سطر دوم و سوم را جابه جا می کنیم و تعداد عناصر روی قطر اصلی مخالف صفر رتبه ماتریس است.

$$\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\\ ۰ & ۴ & ۵\\ ۰ & ۰ & ۵\end{bmatrix}$$

۱۳- گزینه (الف) صحیح است.

۱۴- گزینه (د) صحیح است.

$$\lim_{x\to ۰}\left[\lim_{y\to ۰} f(x,y)\right]=\lim_{x\to ۰}\left[\frac{۲x^۲-۰}{x^۲+۰}\right]=۲$$

$$\lim_{y\to ۰}\left[\lim_{x\to ۰} f(x,y)\right]=\lim\left[\frac{-۳y^۲}{۰+y^۲}\right]=-۳$$

$-۳\neq ۲$ بنابراین حد ندارد

۱۵- گزینه (د) صحیح است.

۱۶- گزینه (ج) صحیح است.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۲x\cos(x^۲+y^۳)$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}=-۶xy^۲\sin(x^۲+y^۳)$$

۱۷- گزینه (ج) صحیح است.

۱۸- گزینه (الف) صحیح است.

$$t^۲+۲t-۳=۰\Rightarrow (t+۳)(t-۱)=۰\Rightarrow t=-۳, t=+۱$$

$$y_۱=c_۱ e^{-۳x} \quad , y_۲=c_۲ e^{+x}$$

بنابراین هر ترکیب خطی از آنها نیز جواب معادله دیفرانسیل است. $y=e^{+x}+e^{-۳x}$

۱۹- گزینه (الف) صحیح است. در ماتریس قطری و مثلثی عناصر روی قطر اصلی مقادیر ویژه هستند

$$\begin{vmatrix} ۳-\lambda & ۰ \\ -۴ & -۱-\lambda \end{vmatrix}=۰\Rightarrow (۳-\lambda)(-۱-\lambda)=۰\Rightarrow \lambda_۱=۳\ ,\lambda_۲=-۱$$

۲۰- گزینه (ب) صحیح است.

$$\begin{bmatrix} ۳-\lambda & -۲ \\ ۲ & -۲-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} +۴ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases} ۴x-۲y=۰ \\ ۲x-y=۰\Rightarrow y=۲x \end{cases}$$

پاسخ سؤالات تشریحی

۱- الف)

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$U=\sqrt{x}\to dU=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=۲\int \frac{\sin\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}}dx=۲\int \sin U dU=-۲\cos U+c=-۲\cos\sqrt{x}+c$$

ب) به روش جزء به جزء

$$\int x^2 e^{-3x}dx$$

$$U = x^2 \to dU = 2xdx$$

$$dV = e^{-3x}dx \to V = -\frac{1}{3}e^{-3x} \qquad \int UdV = U.V - \int Vdx$$

$$\int x^2 e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} - 2\int x(-\frac{1}{3}e^{-3x})dx = \frac{1}{2}x^2e^{-3x} + \frac{2}{3}\int xe^{-3x}dx$$

$$U = x \to dU = dx$$

$$dV = e^{-3x}dx \to V = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

$$\int xe^{-3x}dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \int -\frac{1}{3}e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}$$

$$\int x^2e^{-3x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{-3x} + \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}\right] = \frac{1}{2}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}xe^{-3x} + \frac{2}{27}e^{-3x} + c$$

۲- سطر اول و سطر دوم را جمع می کنیم.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

چون دو سطر با هم برابر است بنابراین دترمینان صفر می شود

۳- نسبت به سطر سوم بسط می دهیم تا دترمینان را محاسبه کنیم

$$|A| = (-1)^{3+1}\times 0 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\times 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\times -4 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

همسازه های عناصر ماتریس A را محاسبه می کنیم.

$$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -17 \qquad A_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 \qquad A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 \qquad A_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

ماتریس همسازه ها به صورت $\begin{bmatrix} -17 & 8 & 10 \\ 12 & -4 & -5 \\ -14 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ است.

بنابراین ماتریس الحاقی به صورت $\operatorname{adj}A = \begin{bmatrix} -۱۷ & ۱۲ & -۴ \\ ۸ & -۴ & ۷ \\ ۱۰ & -۵ & ۷ \end{bmatrix}$ است.

و در نتیجه $A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\operatorname{adj}A = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} -۱۷ & ۱۲ & -۱۴ \\ ۸ & -۴ & ۷ \\ ۱۰ & -۵ & ۷ \end{bmatrix}$

-۴

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} ۲ & -۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۶ & -۱ & ۵ \end{array}\right] \xrightarrow[\leftarrow]{R_۱ \to R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۴ & ۰ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۶ & -۱ & ۵ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۳ - ۲R_۱ \to R_۳]{R_۲ - ۲R_۱ \to R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۴ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۹ & ۳ & ۴ \\ ۰ & -۲ & -۱ & ۷ \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{۱}{۹}R_۲ \to R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۴ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۳} & -\frac{۴}{۹} \\ ۰ & -۲ & -۱ & ۷ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۳ + ۲R_۲ \to R_۳} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۴ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۳} & -۴ \\ ۰ & ۰ & -\frac{۵}{۳} & \frac{-۵۵}{۹} \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{۳}{۵}R_۲ \to R_۳]{R_۱ - ۴R_۲ \to R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & \frac{۴}{۳} & \frac{۷}{۹} \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۳} & -\frac{۴}{۹} \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱۱}{۳} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۲ + \frac{۱}{۳}R_۳ \to R_۲]{R_۱ - \frac{۴}{۳}R_۳ \to R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱۷}{۳} \\ ۰ & ۱ & ۰ & -\frac{۵}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱۱}{۳} \end{array}\right]$$

بنابراین $x_۱ = \frac{۱۷}{۳}, x_۲ = -\frac{۵}{۳}, x_۳ = -\frac{۱۱}{۳}$ تنها جواب دستگاه است.

-۵

$$f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = ۳x^۲ - ۳y = ۰ \Rightarrow x^۲ = y$$

$$f(x) = \frac{\partial f}{\partial y} = -۳x + ۳y^۲ = ۰ \Rightarrow -۳x + ۳(x^۲)^۲ = ۰ \Rightarrow -۳x + ۳x^۴ = ۰$$

$$\Rightarrow ۳x(-۱ + x^۳) = ۰ \Rightarrow x = ۰, x = ۱, y = ۰, y = ۱$$

نقاط بحرانی عبارتند از: $(۰,۰),(۱,۱)$

$$f_{xx} = ۶x \qquad f_{yy} = ۶y \qquad f_{xy} = -۳$$

$$\Delta(۰,۰) = f_{xx}{}^{(۰,۰)} f_{yy}{}^{(۰,۰)} - \left[f_{xy}{}^{(۰,۰)}\right]^۲ = ۰ - (-۳)^۲ = -۹ < ۰$$

بنابراین نقطه $(۰,۰)$ نقطه زین اسبی است

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(۱,۱) = ۶\times۶-[-۳]^{۲} = ۳۶-۹ = ۲۷\rangle ۰ \\ f_{xx}{}^{(۱,۱)} = ۶\rangle ۰\end{array}\right\} \Rightarrow$$ نقطه (۱,۱) min نسبی است

نیمسال دوم ۸۶-۸۵ زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

۱. انتگرال $\int \frac{5x^2 - 6x\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}dx$ برابر است با:

الف. $x^{\frac{5}{2}} - x^2 + c$ ب. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + c$

ج) $x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + c$ د) $\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} - x^2 + c$

۲. انتگرال $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ با کدام روش قابل حل است؟

الف. تجزیه کسر ب. جزء به جزء ج. تغییر متغیر $x^2+1=u$ د. روش ذوزنقه ای

۳. مقدار انتگرال $\int_1^e \ln x dx$ برابر است با :

الف. e ب. ۱ ج. $e-1$ د. $e+1$

۴. مقدار انتگرال $\int_1^e \frac{\cos(\mathrm{Ln}x)dx}{x}$ برابر است با:

الف. $\mathrm{Sin}\ e$ ب. $\mathrm{CoS}\ e$ ج. $\mathrm{CoS}\ 1$ د. $\mathrm{Sin}\ 1$

۵. مساحت ناحیه محدود به نمودار توابع $y=x^3, y=x^2$ در فاصله $[0,1]$ برابر است با:

الف. $\frac{1}{12}$ ب. $\frac{1}{6}$ ج. $\frac{1}{24}$ د. $\frac{1}{3}$

۶.مقدار انتگرال $\int_{-1}^{2}(4x^3-2x)dx$ با استفاده از قاعده منشور برابر است با:

الف. ۲۱ ب. ۱۲ ج. ۲۴ د. ۱۱

۷. کدام یک از روابط زیر همواره درست است؟

الف. $(AB)^T = A^T B^T$ ب. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

ج) $(A^T + B)^T = A^T + B^T$ د) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

۸. حاصل ضرب $\begin{bmatrix}۰\\۱\\-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱&-۱\end{bmatrix}$ کدامست؟

الف. $\begin{bmatrix}۲\end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix}۰&۱&-۱\\۲&۱&-۱\\-۲&۱&۱\end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۲&۱&-۱\\-۲&-۱&۱\end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۲&۱&-۱\\-۲&۱&-۱\end{bmatrix}$

۹. جواب معادله ماتریسی $\begin{bmatrix}۱&۱\\۲&۳\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}۱&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}$ کدامست؟

الف. $\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&-۱\end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۱&۱\end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۲\end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix}۲&-۱\\۲&۱\end{bmatrix}$

۱۰. نوع ماتریسی $\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\\frac{-\sqrt{۳}}{۲}&\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ کدامست؟

الف. متقارن است ب. شبه متقارن است ج. منفرد است د. متعامد است

۱۱. جواب معادله $\begin{vmatrix}۱&۰&۲\\۳&X&۴\\۱&۳&۱\end{vmatrix}$ کدامست؟

الف. ۶- ب. ۶ ج. ۳ د. ۳-

۱۲.وارون ماتریسی $\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۰&۱&۲\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$ کدامست؟

الف. $\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۰&۱&۲\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix}۱&-۲&۲\\۰&۱&-۲\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix}۱&-۲&۲\\۰&۱&۲\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۰&۱&-۲\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$

۱۳. رتبه ماتریسی $\begin{bmatrix}۱&۲&۰&۱\\۲&۴&۰&۲\\۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}$ کدامست؟

الف. ۱ ب. ۲ ج. ۳ د. ۴

۱۴. مقدار $\lim_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{x^۲ - y}{۲x + y}$ برابر است با:

الف. ۱- ب. ۱ ج. $\frac{۱}{۲}$ د. صفر

۱۵. کدام تابع خطی است؟

الف) $f\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_۱ + x_۲ \\ ۲x_۱ \\ x_۲ + x_۱ + ۱ \end{bmatrix}$ ب) $f\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲x_۱ - x_۳ \\ ۳x_۲ + x_۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$

ج) $f\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_۱x_۲ \\ x_۱ - x_۲ \end{bmatrix}$ د) $f\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲x_۱ - x_۲ \\ {x^۲}_۱ + x_۲ \end{bmatrix}$

۱۶. اگر $xy^۲ + zx + z^۲ + y = ۰$ باشد مقدار $\frac{dz}{dy}$ کدامست؟

الف. $-\frac{۲x + ۱}{x + ۲z}$ ب. $-\frac{۲xy + ۱}{x + ۲z}$ ج. $-\frac{۲x + y}{x + ۲z}$ د. $-\frac{x + ۲y}{x + ۲z}$

۱۷.اگر $z = f(\frac{x+y}{x-y})$, $x + y = u$, $x - y = V$ باشند آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ کدامست؟

الف. $۲\frac{\partial z}{\partial v}$ ب. $\frac{\partial z}{\partial u}$ ج. $\frac{\partial z}{\partial v}$ د. $۲\frac{\partial z}{\partial u}$

۱۸. نقطه ی $(۱,۱,-۴)$ برای تابع $f(x, y) = y^۲ - ۳x^۲ + ۶x - ۸y$ چه نقطه ای است؟

الف. ماکسیمم ب. مینیمم ج. زین اسبی د. هیچکدام

۱۹.ویژه مدارهای ماتریس $\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ کدامند؟

الف. ۲,۱ ب. $-۲,۱$ ج. $-۳,۱$ د. $-۳,-۱$

۲۰. $y = e^{۲x}$ جواب کدام معادله دیفرانسیل زیر می باشد؟

الف) $y'' + ۲y' + y = ۰$ ب) $y'' - ۲y' + y = ۰$

ج) $y'' - ۴y' + y = ۰$ د) $y'' - y' - ۲y = ۰$

سوالات تشریحی

۱. انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

الف. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ ب. $\int_۰^۱ x^۲ \sin x dx$

۲. دستگاه زیر را به روش گاوسی حل کرده و راه حل های کرامر و وارون ماتریس آن را بیان کنید:

$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ = ۹ \\ x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ = ۶ \\ ۳x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ = ۸ \end{cases}$$

۳. ماکسیمم یا مینیمم تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲$ را تحت محدودیت $x + ۴y = ۲$ را بدست آورید.

۴. نشان دهید که $y^۲ = cx + \frac{۱}{۸}c^۳$ جواب معادله دیفرانسیل $y^۲ y'^۳ + ۲xy' = y$ است.

۵. ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

پاسخ سؤالات تستی

۱- گزینه (الف) صحیح است.

$$\int \frac{۵x^۲ - ۶x\sqrt{x}}{۳\sqrt{x}} dx = \int \frac{۵}{۳} x^{\frac{۳}{۲}} dx - \int ۲x dx = \frac{۵}{۳} \times \frac{۱}{۱+\frac{۳}{۲}} x^{\frac{۳}{۲}+۱} - ۲ \times \frac{۱}{۲} x^۲ + c = x^{\frac{۵}{۲}} - x^۲ + c$$

۲- گزینه (ج) صحیح است.

۳- گزینه (ب) صحیح است.

$$U = Lnx \to dU = \frac{dx}{x}$$
$$dV = dx \to V = x$$
$$\int_۱^e Lnx dx = xLnx\Big]_۱^e - \int_۱^e x \times \frac{dx}{x} = xLnx - x\Big]_۱^e$$
$$= (e-e) - (۰ - ۱) = ۱$$

۴- گزینه (د) صحیح است.

$$U = Lnx \to dU = \frac{dx}{x}$$
$$\int_۱^e \frac{\cos(Lnx)}{x} dx = \sin Lnx\Big]_۱^e = \sin ۱$$

۵- گزینه (الف) صحیح است.

$S=\int_0^1 (x^2-x^3)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\Big]_0^1=\frac{1}{12}$ واحد سطح

۶- گزینه (ب) صحیح است.

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$$

روش منشور $\int_{-1}^{2}(4x-2x)dx=\frac{2-(-1)}{6}\left[(32-4)+(4-2)+(-4+2)\right]=12$

۷- گزینه (ب صحیح است.

۸- گزینه (د صحیح است.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

۹- گزینه (الف) صحیح است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+c=1\Rightarrow a=1-c \\ b+d=0\Rightarrow b=-d \\ 2a+3c=1\Rightarrow 2(1-c)+3c=1\Rightarrow 2-2c+3c=1\Rightarrow c=-1, a=1-(-1)=2 \\ 2b+3d=-1\Rightarrow 2(-d)+3d=-1\Rightarrow d=-1, b=1 \end{cases}$$

$$X=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

۱۰- گزینه (د صحیح است.

۱۱- گزینه (ب) صحیح است.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & x & 4 & 3 & x \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right. =(x+0+18)-(0+12+2x)=0\Rightarrow x=6$$

۱۲- گزینه (ب) صحیح است.

$$|A|=1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow[R_2-2R_3\to R_2]{R_1-2R_3\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow{R_1}$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

۱۳- گزینه (الف) صحیح است. چون ستونها مضربی از یکدیگر هستند.

۱۴- گزینه (ب) صحیح است.

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{x^۲ - y}{۲x + y} = \frac{۰-۱}{۰+۱} = -۱$$

۱۵- گزینه (ب) صحیح است.

۱۶- گزینه (ب) صحیح است.

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{۲xy+۱}{x+۲z}$$

۱۷- گزینه (د) صحیح است.

$$U = x+y, V = x-y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial U}.\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial V}.\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial U}\times ۱ + \frac{\partial z}{\partial V}\times ۱ = \frac{\partial z}{\partial U} + \frac{\partial z}{\partial V}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial U}.\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial V}.\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial U} + \frac{\partial z}{\partial V}\times -۱ = \frac{\partial z}{\partial U} - \frac{\partial z}{\partial V}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial U} + \frac{\partial z}{\partial V} + \frac{\partial z}{\partial U} - \frac{\partial z}{\partial V} = ۲\frac{\partial z}{\partial U}$$

۱۸- گزینه (ج) صحیح است.

$$\begin{cases} f_x = -۶x + ۶y = ۰ \Rightarrow x = y = ۱ \\ f_y = ۲y + ۶x - ۸ = ۰ \Rightarrow ۸y = ۸ \Rightarrow y = ۱ \end{cases}$$

$$f_{xx} = -۶ \qquad f_{yy} = ۲ \qquad f_{xy} = ۶$$

$$\Delta f_{xx} f_{yy} - \left[f_{xy}\right]^۲ = -۶\times۶ - [۲]^۲ = -۴۰ \langle ۰ \Rightarrow$$ نقطه زین اسبی است

۱۹- گزینه (د) صحیح است.

$$\lambda^۲ + ۴\lambda + ۳ = ۰ \Rightarrow (\lambda+۱)(\lambda+۳) = ۰ \Rightarrow \lambda_۱ = -۱ \ ,\lambda_۲ = -۳$$

۲۰- گزینه (د) صحیح است.

جواب معادله ی دیفرانسیل در معادله دیفرانسیل باید صدق کند

$$y = e^{۲x} \to y' = ۲e^{۲x} \to y'' = ۴e^{۲x}$$

$$y'' - y' - ۲y = ۰ \Rightarrow ۴e^{۲x} - ۲e^{۲x} - ۲e^{۲x} = ۰$$

پاسخ سؤالات تشریحی

۱- $U=\sqrt{x}+1 \Rightarrow dU=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$

الف)

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=2\int\frac{1}{\sqrt{x}+1}\times\frac{dx}{2\sqrt{x}}=2\mathrm{Ln}(\sqrt{x}+1)+c$$

ب) از تکنیک انتگرال جزء به جزء استفاده می کنیم $\int_0^1 x^2\sin x dx$

$$U=x^2 \to dU=2xdx$$
$$dV=\sin xdx \to V=-\cos x$$
$$\int x^2\sin xdx=-x^2\cos x+2\int x\cos xdx+c$$
$$U=x \to dU=du$$
$$dV=\cos xdx \to V=\sin x$$
$$\int x\cos xdx=x\sin x-\int\sin xdu=x\sin x+\cos x+c'$$
$$\int x^2\sin xdu=-x\cos x+2\left[x\sin x+\cos x+c'\right]$$
$$\int_0^1 x^2\sin xdu=-x\cos x+2x\sin x+\cos x\Big]_0^1=$$
$$=-\cos 1+2\sin 1+\cos 1-(0+0+1)=2\sin 1-1$$

۲-

$$\left|\begin{array}{ccc:c}2&3&1&9\\1&2&3&6\\3&1&2&8\end{array}\right|\xrightarrow{\substack{R_2\to R_1\\ \leftarrow}}\left|\begin{array}{ccc:c}1&2&3&6\\2&3&1&9\\3&1&2&8\end{array}\right|$$

$$\xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&3&6\\0&-1&-5&-3\\0&-5&-7&-10\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-5R_2\to R_3]{-R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&3&6\\0&1&5&3\\0&0&18&5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{R_3}{18}\to R_3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&3&6\\0&1&5&3\\0&0&1&\frac{15}{8}\end{array}\right]\xrightarrow[R_2-5R_3\to R_2]{R_1-3R_3\to R_3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&0&\frac{93}{18}\\0&1&0&\frac{29}{18}\\0&0&1&\frac{5}{18}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&\frac{35}{18}\\0&1&0&\frac{29}{18}\\0&0&1&\frac{5}{18}\end{array}\right]$$

بنابراین $x_۱=\frac{۳۵}{۱۸}$,$x_۲=\frac{۲۹}{۱۸}$,$x_۳=\frac{۵}{۱۸}$ جواب منحصر به فرد دستگاه است روش وارون ماتریس در صورتی که تعداد معادلات و تعداد مجهولات برابر باشد و ماتریس ضرائب دستگاه وارون پذیر باشد در این صورت: $Ax=B \Rightarrow A^{-۱}AX=A^{-۱}B \Rightarrow X=A^{-۱}B$

روش کرامر: اگر ماتریس ضرائب یک دستگاه وارون پذیر باشد و برای هر مجهول ماتریسی را تشکیل دهیم که معلومات در ستون ضرائب آن مجهول باشد در این صورت : $X_i=\frac{\det A_{xi}}{\det A}$

-۳ $F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$

$$F(x,y)=x^۲+y^۲-\lambda(x+۴y-۲)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial F_{(x,y)}}{\partial x}=۲x-\lambda=۰ \Rightarrow x=\frac{\lambda}{۲}\\ \frac{\partial F_{(x,y)}}{\partial y}=۲y-۴\lambda=۰ \Rightarrow y=۲\lambda\\ \frac{\partial F_{(x,y)}}{\partial \lambda}=x+۴y-۲=۰ \Rightarrow \frac{\lambda}{۲}+۸\lambda-۲=۰ \Rightarrow ۱۷\lambda=۴ \Rightarrow \lambda=\frac{۴}{۱۷}\end{cases}$$

$$x=\frac{\lambda}{۲} \Rightarrow x=\frac{۲}{۱۷}$$

$$y=۲\lambda \Rightarrow y=\frac{۸}{۱۷}$$

۴- جواب معادله دیفرانسیل باید در معادله دیفرانسیل صدق کند.

$$y^۲=cx+\frac{۱}{۸}c^۳ \Rightarrow ۲yy'=c \Rightarrow y'=\frac{c}{۲y}$$

$$y^۲.(\frac{c}{۲y})^۳+۲x(\frac{c}{۲y})=y \Rightarrow \frac{c^۳}{۸y}+\frac{۲cx}{۲y}=y$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۸y}(c^۳+۸cx)=y \Rightarrow ۸y^۲=c^۳+۸cx \Rightarrow y^۲=\frac{۱}{۸}c^۳+cx$$

-۵ $$|A-\lambda I|=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix}۲-\lambda & ۱\\ ۲ & ۳-\lambda\end{vmatrix}=۰ \Rightarrow \lambda^۲-۵\lambda+۴=۰ \Rightarrow (\lambda-۱)(\lambda-۴)=۰$$

$$\Rightarrow \lambda_۱=۱\,,\,\lambda_۲=۴$$

$$\lambda_۱=۱ \Rightarrow \begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x+y=۰\\ ۲x+۲y=۰\end{cases} \Rightarrow x=-y$$

$$\lambda_۲ = ۲ \Rightarrow \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -۲x + y = ۰ \Rightarrow y = ۲x \Rightarrow x = \dfrac{y}{۲} \\ ۲x - y = ۰ \Rightarrow y = ۲x \Rightarrow x = \dfrac{y}{۲} \end{cases}$$

بنابراین بردارهای ویژه عبارتند از $\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ ۲x \end{bmatrix}$

نیمسال اول ۸۷-۸۶ زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

۱. اگر ماتریس $A_{n\times n}$ هم متقارن و هم شبه متقارن باشد در این صورت:

الف) $A = I$ ب) عناصر روی قطر اصلی A همگی صفرند

ج) عناصر خارج قطر اصلی همگی صفرند د) $A = ۰$

۲. اگر $\det(A^{-۱}) = ۳$ باشد آنگاه حاصل $\det(A^T)$ کدام است؟

الف. $\frac{۱}{۳}$ ب. $\frac{۳}{۲}$ ج. $-\frac{۱}{۳}$ د. -۳

۳. حاصل ضرب $\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۷ & ۲ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

الف. $\begin{bmatrix} ۳ & ۱۰ \\ ۷ & -۲ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} ۲۳ & ۱۶ \\ ۶ & -۳ \\ ۱۵ & ۹ \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۱۰ \\ ۴ & ۷ & ۳ \end{bmatrix}$ د. هیچکدام

۴. اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ x & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\det(A^t) = ۲$ مقدار x برابر است با:

الف. ۱ ب. ۱- ج. ۰ د. ۲

۵. رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ برابر است با :

الف. ۱ ب. ۱- ج. ۰ د. ۲

۶. دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

الف. جواب ندارد ب. یک جواب دارد ج. بی شمار جواب دارد د. دو جواب دارد

۷. به ازای چه مقدار از a ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & a \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ دارای معکوس است؟

الف. $a \neq -1$ ب. $a \neq 2$ ج. $a \neq -2$ د. $a \neq 1$

۸. حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$ برابر است با:

الف. ۰ ب. $\frac{2}{\sqrt{2}}$ ج. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ د. ۱

۹. تابع اولیه $F(x)$ برای تابع $f(x) = 3x^2 + 2x$ که در شرط $F(0) = 2$ صدق کند برابر است با:

الف) $f(x) = x^3 + x^2 + 2$ ب) $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$

ج) $f(x) = x^3 + x^2$ د) $f(x) = x^3 + x^2 + c$

۱۰. مقدار انتگرال $\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$ برابر است با؟

الف. ۰ ب. ۱ ج. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ د. ۱-

۱۱. انتگرال $\int (x^2+1)e^{2x} dx$ از کدام روش محاسبه می گردد؟

الف. تغییر متغیر $U = 2x$ ب. جزء به جزء ج. کسرهای ساده د. تغییر متغیر $x = \ln t$

۱۲. مساحت محدود به نمودار تابع $f(x) = x^2 - 3x$ و محور xها و خطوط $x = -1, x = 0$ برابر است با:

الف. $\frac{11}{6}$ ب. ۱ ج. $\frac{6}{11}$ د. $-\frac{11}{6}$

۱۳. کدام یک از توابع زیر خطی است؟

الف) $f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y \end{bmatrix}$ ب) $f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} y-x \\ 2 \end{bmatrix}$

ج) $f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x-y \\ y \end{bmatrix}$ د) $f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x.y \\ x \end{bmatrix}$

۱۴. در مورد حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 4y^2}{3x^2 + y^2}$ کدام گزینه صحیح است؟

الف. $\frac{1}{3}$ ب. -4 ج. ۰ د. وجود ندارد

۱۵. اگر $f(x,y) = \ln(xy)$ آنگاه f_{xx} برابر است با:

الف. $\frac{1}{x}$ ب. $\frac{-1}{x^2}$ ج. $\frac{1}{y}$ د. $-\frac{1}{y^2}$

۱۶.اگر $f(x,y)=x^3-4xy^2+5x$ باشد در اینصورت حاصل df برابر است با:

الف. $df=(3x^2+5)dx+(-8y)dy$

ب. $df=(3x^2-4y^2+5)dx+(-8xy)dy$

ج. $df=(-8xy)dx+(3x^2-4y^2+5)dy$

د. $df=0$

۱۷. اگر $f(x,y)=\frac{2x}{x-y}$ باشد مقدار $f_x(3,1)$ برابر است با:

الف. $\frac{1}{2}$ ب. ۰ ج. ۱ د. $-\frac{1}{2}$

۱۸. اگر در یک نقطه $f_{xy}=0\ ,\ f_{yy}=1\ ,\ f_{xx}=2$ باشد آنگاه f در آن نقطه دارای:

الف. مینیمم نسبی ب. ماکزیمم نسبی است ج. زین اسبی است د. هیچ کدام است

۱۹. جواب معادله دیفرانسیل $y'=\frac{-y}{x}$ با شرط $y(1)=-1$ برابر است با:

الف. $y=-1$ ب. $y=\frac{-1}{x}$ ج. $xy=2$ د. $xy=-2$

۲۰. مرتبه ی معادله ی دیفرانسیل $5y''+(y')^3+2y^3y'=0$ برابر است با:

الف. ۱ ب. ۳ ج. ۲ د. ۶

سؤالات تشریحی

۱. حاصل هر یک از انتگرالهای زیر را بیابید:

الف. $\int x.\sec x \operatorname{tg} x dx$ ب. $\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+1}dx$

۲. وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را به کمک اعمال سطری مقدماتی بیابید؟

۳. جواب دستگاه معادلات $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 2x+3y-z=2 \\ 4x+5y+3z=7 \end{cases}$ را در صورت وجود بیابید.

۴. فرض کنید $f(x,y)=xy+y\ln(xy)$ نشان دهید که:

$$x.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=y^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

۵. فرض کنید مطلوبیت مصرف کننده ای بستگی به مصرف او از دو کالا داشته باشد اگر میزان مصرف او از این کالاها به ترتیب y,x و قیمت هر واحد به ترتیب۳ و۴ هزار تومان و درآمد مصرف کننده ۴۸ هزار تومان و تابع مطلوبیت مصرف کننده برابر $U=f(x,y)=3xy$ باشد به کمک روش لاگرانژ را طوری بیابید که مطلوبیت مصرف کننده حداکثر شود.

پاسخ سؤالات تستی

۱- گزینه (د) صحیح است.

۲- گزینه (الف) صحیح است.

$$\left|A^{-1}\right|=3\Rightarrow|A|=\frac{1}{3}\Rightarrow|A|\left|A^T\right|=\frac{1}{3}$$

۳- گزینه (د) صحیح است. ضرب ماتریسهای فوق امکان پذیر نیست چون تعداد ستون ماتریس اول باید برابر تعداد سطرهای ماتریس اول باشد.

۴- گزینه (ب) صحیح است.

$$|A|=\left|A^T\right|=2$$

$$|A|=(-1)^2\times 1\times\begin{vmatrix}-1 & x\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1-x=2\Rightarrow x=-1$$

۵- گزینه (د) صحیح است.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+R_3\to R_1}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[\leftarrow]{R_1\to R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

۶- گزینه (ب) صحیح است. دترمینان ماتریس ضرائب مخالف صفر است بنابراین جواب منحصر به فرد دارد یا طبق سؤال قبل رتبه ماتریس و مرتبه آن برابر است بنابراین جواب منحصر به فرد است.

۷- گزینه (ج) صحیح است.

$$|A|\neq 0\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ a & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow a=-2$$

۸- گزینه (د) صحیح است.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^{2} x dx = \tan x \Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

۹- گزینه (د) صحیح است.

$$f(x) = \int f(x) du = x^{3} + x^{2} + c$$

$$F(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$F(x) = x^{3} + x^{2} + 2$$

۱۰- گزینه (ج) صحیح است.

$$\int_{\frac{\pi^{2}}{16}}^{\frac{\pi^{2}}{4}} \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} du = -\cos\sqrt{x}\Big]_{\frac{\pi^{2}}{16}}^{\frac{\pi^{2}}{4}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۱- گزینه (ب) صحیح است.

۱۲- گزینه (الف) صحیح است.

$$x^{2} - 3x = 0 \Rightarrow x_{1} = 0, x_{2} = 3$$

$$\int_{-1}^{0} (x^{2} - 3x) du = \frac{1}{3}x^{3} - \frac{3}{2}x^{2}\Big]_{-1}^{0} = 0 - (-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) = \frac{11}{6}$$

۱۳- گزینه (د) صحیح است.

۱۴- گزینه (د) صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x^{2} - 4y^{2}}{3x^{2} + y^{2}}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2}}{3x^{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^{2} - 4y^{2}}{3x^{2} + y^{2}}\right] = \lim \frac{-4y^{2}}{y^{2}} = -4$$

چون $\frac{1}{3} \neq -4$ بنابراین حد وجود ندارد.

۱۵- گزینه (ب) صحیح است.

$$f(x, y) = \mathrm{Ln}(xy)$$

$$f(x) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} \Rightarrow f_{xx} = \frac{-1}{x^{2}}$$

۱۶- گزینه (ب) صحیح است.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}.dy = (3x^{2} - 4y^{2} + 5)dx + (-8xy)dy$$

۱۷- گزینه (د) صحیح است.

$$fx=\frac{۲(x-)-۲x}{(x-y)^{۲}}=\frac{-۲y}{(x-y)^{۲}}\Rightarrow f_x(۳,۱)=\frac{-۲}{(۳-۱)^{۲}}=-\frac{۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۸- گزینه (الف) صحیح است.

$$\Delta f_{xx}P_{yy}-[fxy]^{۲}=۲\times۱-۰=۲\rangle۰,f_{xx}\rangle۰\Rightarrow$$ Min نسبی است

۱۹- گزینه (ب) صحیح است.

$$y'=-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow Lny=-cLnx$$

$$Lny=cLnx^{-۱}\Rightarrow y=\frac{c}{x}$$

$$y(۱)=-۱\Rightarrow-۱=\frac{c}{۱}\Rightarrow c=-۱\Rightarrow y=\frac{-۱}{x}$$

۲۰- گزینه (ج) صحیح است.

پاسخ سؤالات تشریحی

۱- الف) به روش جزء به جزء

$$\int x\sec ctgxdu$$

$$U=x\rightarrow du=dx$$

$$dV=\sec xtgxdx\rightarrow V=\sec x$$

$$\int x\sec xtgxdu=x\sec x-\int\sec x-\int\sec xdx=x\sec x-Ln|\sec x+\tan x|+c$$

$$\int\frac{x^{۲}-۲x}{x^{۳}-۳x^{۲}+۱}\qquad U=x^{۳}-۳x^{۲}+۱\qquad dU=(x^{۲}-۲x)dx$$

-۲

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}۱&-۱&۰&۱&۰&۰\\۰&۱&-۱&۰&۱&۰\\۱&۰&۱&۰&۰&۱\end{array}\right]\xrightarrow{R_۳-R_۱\rightarrow R_۱}\left[\begin{array}{ccc|ccc}۱&-۱&۰&۱&۰&۰\\۰&۱&-۱&۰&۱&۰\\۰&۱&۱&-۱&۰&۱\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۳-R_۲\rightarrow R_۲}\left[\begin{array}{ccc|ccc}۱&-۱&۰&۱&۰&۰\\۰&۱&-۱&۰&۱&۰\\۰&۰&۲&-۱&-۱&۱\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{R_۳}{۲}\rightarrow R_۳}\left[\begin{array}{ccc|ccc}۱&-۱&۰&۱&۰&۰\\۰&۱&-۱&۰&۱&۰\\۰&۰&۱&-\frac{۱}{۲}&-\frac{۱}{۲}&\frac{۱}{۲}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲+R_۳\to R_۲}\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{array}\right]\xrightarrow{R_۱+R_۲\to R_۲}\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۱ & ۰ & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{array}\right]$$

۳- به روش کراکر دستگاه را حل می کنیم چون دترمینان ماتریس ضرایب صفر است بنابراین دستگاه دارای جواب منحصر به فرد نیست.

$$\Delta=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۵ & ۳ \end{vmatrix}=۰$$

۴-

$$\frac{\partial F}{\partial X}=y+y\times\frac{y}{xy}=y+\frac{y}{x} \qquad \frac{\partial^۲ f}{\partial^۲ x}=\frac{-y}{x^۲}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+\ln(xy)+y.\frac{x}{xy}=x+Ln(xy)+۱ \qquad \frac{\partial^۲ f}{\partial^۲ y}=\frac{x}{xy}=\frac{۱}{y}$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}^{(\frac{\partial f}{\partial y})}=۱+\frac{۱}{x}$$

$$x(\frac{-y}{x^۲})+(۱+\frac{۱}{x})=-\frac{y}{x}+y+\frac{y}{x}=y \quad I$$

$$y^۲\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}=y^۲\times\frac{۱}{y}=y \quad II$$

بنابراین تساوی I و II برقرار است.

۵-

$$۳x+۴y=۴۸\Rightarrow y(x,y)=۳x+۴y-۴۸$$

$$f(x,y)=۳xy$$

$$F(x,y,\lambda)=F(x,y)-\lambda g(x,y)=۳xy-\lambda(۳x+۴y-۴۸)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=۳y-۳\lambda=۰\Rightarrow y=\lambda \\ \frac{\partial F}{\partial y}=۳x-۴\lambda=۰\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}\lambda \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=۳y+۴\lambda-۴۸=۳\times\frac{۴}{۳}\lambda+۴\lambda-۴۸=۰\Rightarrow\lambda=۶ \end{cases}$$

بنابراین $x=\frac{۴}{۳}\times۶=۸ \ , \ y=۶$

نیمسال دوم ۸۷-۸۶ زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

۱. در حل $\int xe^x dx$ به روش جزء به جزء u , dv کدامند؟

الف) $u = e^x \ , dv = xdx$ ب) $u = xe^x \ , dv = dx$

ج) $u = x \ , dv = e^x dx$ د) $u = e^x dx \ , dv = x$

۲. در تجزیه کسر $\frac{x+۵}{x^۲ - ۲x + ۱}$ به مجموع کسرهای جزئی، شکل صحیح تجزیه کدامست؟

الف) $\frac{A}{(x-۱)}$ ب) $\frac{A}{(x-۱)} + \frac{B}{(x-۱)^۲}$

ج) $\frac{A}{(x-۱)^۲}$ د) $\frac{A}{x-۱} + \frac{Bx+c}{(x-۱)^۲}$

۳.در حل $\int \frac{\sqrt{x}dx}{۱+\sqrt[۴]{x^۳}}$ کدام تغییر متغیر راه حل سوال است؟

الف. $x = z^۴$ ب. $x^۳ = z^۴$ ج. $x = z^۲$ د. $x^۳ = z^۲$

۴.مساحت ناحیه ی محدود به نمودار $h(x) = x^۲ - ۴x$، محور xها و خطهای $x = ۰$, $x = ۴$ با کدام انتگرال معین زیر مشخص می گردد؟

الف) $A = \int_۰^۴ (x^۲ - ۴x)dx$ ب) $A = \int_۰^۴ (x^۲ - ۴x)dx - \int_۲^۴ (x^۲ - ۴x)dx$

ج) $A = -\int_۰^۴ (x^۲ - ۴x)dx + \int_۲^۴ (x^۲ - ۴x)dx$

د) $A = -\int_۰^۴ (x^۲ - ۴x)dx$

۵. اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ ۱ & -۱ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ کدام مورد صحیح نیست؟

الف) ماتریس AB و ۲×۲ هست. ب) ماتریس BA و ۳×۳ هست.

ج) $AB \neq BA$ د) $AB = BA$

۶. اگر B,A دو ماتریس $n \times n$ باشند، کدام مورد صحیح است؟

الف) $A^T + B = (A + B^T)^T$ ب) $A^T + B = A + B^T$

ج) $A^T + B = (A^T + B^T)^T$ د) $A^T + B = (A+B\ )^T$

۷. در معادله ی $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۷ & ۲x \end{vmatrix}$ مقدار x چند است؟

الف. ۲ ب. ۱ ج. ۷ د. ۱۴

۸. اگر A, B ماتریسهای مربع، k اسکالر و $tr(A)$ اثر ماتریس A باشد، کدام مورد صحیح نیست؟

الف) $tr(kA)ktr(A)$ ب) $tr(AB) = tr(A).tr(B)$

ج) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ د) $tr(AB) = tr(BA)$

۹. اگر $Q = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، کدام مورد صحیح است؟

الف. $Q^۲ = ۰$ ب. $Q^۳ = ۰$ ج. $Q^۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ د. $Q^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۱۰. در مورد ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۴ & -۳ & -۳ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۴ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ کدام گزینه صحیح نیست؟

الف. $A.adjA = I$ ب. $adjA = A$ ج. $A^{-۱} = A$ د. $\det A^{-۱} = \det A$

۱۱. اگر تعداد مجهولها با تعداد معادله های یک دستگاه معادلات خطی n معادله n مجهولی برابر باشد، آنگاه:

الف. در صورتیکه ماتریس ضرایب دستگاه وارون پذیر باشد، این دستگاه همواره جواب منحصر بفرد دارد.

ب. در صورتیکه دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه صفر باشد، این دستگاه همواره جواب منحصر بفرد دارد.

ج. این دستگاه همواره جواب منحصر بفرد دارد.

د. این دستگاه هیچگاه جواب منحصر بفرد نخواهد داشت.

۱۲. اگر $X_۱, X_۲$ دو جواب دستگاه غیر همگن $AX = B$ باشند، کدام مورد صحیح نیست؟

الف. $X_۱, X_۲$ جوابی برای دستگاه همگن $AX = ۰$ است.

ب. $X_۱, X_۲$ جوابی برای دستگاه همگن $AX = ۰$ است.

ج. دستگاه غیرهمگن $AX = B$ جواب منحصر بفرد دارد اگر و تنها اگر دستگاه همگن $AX = ۰$ جواب منحصر بفرد داشته باشد.

د. هر جواب دستگاه غیر همگن $AX = B$ جوابی از دستگاه همگن $AX = ۰$ نیز هست و بالعکس

۱۳. در مورد مجموعه $\{(۱,۱,۰),(۰,۱,۱),(۱,۰,۱)\}$ چه می توان گفت؟

الف. مستقل خطی است

ب. وابسته ی خطی است

ج. فقط زیر مجموعه های سره ی آن مستقل خطی اند

د. یک ترکیب خطی از بردارهای فوق یافت می شود که مخالف صفر است

۱۴. در مورد ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۲ & ۶ & -۲ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ **کدام مورد صحیح <u>نیست</u>؟**

الف) $\det A = ۰$

ب) رتبه ی A، ۲ است

ج) رتبه ی A، نمی تواند برابر ۳ باشد

د) رتبه ی A، دقیقاً ۳ است

۱۵. در دستگاه معادلات روبرو اگر دترمینان ماتریس ضرایب ۳۶- باشد، مقدار متغیر x کدامست؟

$$\begin{cases} x + y - z = ۶ \\ ۳x - ۴y + ۲z = -۲ \\ ۲x + ۵y + x = ۰ \end{cases}$$

الف. ۴-

ب. صفر

ج. ۲

د. ۶

۱۶. اگر $f(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_۱ - ۲x_۲ \\ x_۱x_۲ \\ ۱ + x_۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $g(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}) = ۲x_۱ - ۳x_۲ + x_۳$ آنگاه:

الف) f خطی و g غیر خطی است

ب) هر دو تابع خطی اند

ج) f غیرخطی و g خطی است

د) هر دو تابع غیرخطی اند

۱۷. تابع $h(x, y) = \sqrt{۱ + x^۲ + y^۲}$ مفروض است. کدام گزینه در این مورد <u>نادرست است؟</u>

الف) دامنه ی h کل صفحه $R^۲$ است

ب) دامنه ی h $\{(x, y) \in R^۲ | x \geq ۰, y \geq ۰\}$ است

ج) h در کل $R^۲$ پیوسته است

د) h در هر نقطه ای از $R^۲$ حد دارد

۱۸. حاصل $\lim\limits_{(x,y,z)\to(۰,\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})} \sin(x+۲y-z)$ کدام است؟

الف. صفر ب. یک ج. ۱- د. بینهایت

۱۹. اگر $f(x,y)=x^{\frac{۱}{۲}}+y^{\frac{۱}{۲}}$، مقدار df به ازای $x=۴\ ,y=۹\ ,dx=۰/۱,\ dy=۰/۲$ چیست؟

الف. ۰/۵۸ ب. ۰/۰۰۵۸ ج. ۰/۰۵۸ د. ۵/۸

۲۰. در مورد معادله ی $۶y''-۳y'+۴x^{۲}+۵y=۰$ چه می توان گفت؟

الف) یک معادله ی دیفرانسیل نیست ب) معادله دیفرانسیلی از مرتبه ی ۳ هست

ج) معادله دیفرانسیای از مرتبه ی اول است د) معادله دیفرانسیلی از مرتبه ی دوم است

سؤالات تشریحی

الف) انتگرال نامعین $\int\frac{(۱-\sqrt{x}\ )^{۲}}{\sqrt{x}}$ را محاسبه کنید.

ب)انتگرال معین $\int_{۰}^{۲} e^{\frac{۳}{۲}x}dx$ را محاسبه کنید.

۱. فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس C را طوری بیابید که $۳A-۲C=۴B$

۲. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$، بدون محاسبه ی $A^{-۱}$، مقدار $\det A^{-۱}$ را بدست آورید.

۳. دستگاه معادلات خطی داده شده را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x_{۱}+۲x_{۲}+x_{۳}=۲ \\ ۳x_{۱}+x_{۲}-۲x_{۳}=۱ \\ ۴x_{۱}-۳x_{۲}-x_{۳}=۳ \\ ۲x_{۱}+۴x_{۲}+۲x_{۳}=۴ \end{cases}$$

۴. نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و زین اسبی تابع $f(x,y)=x^{۲}-y^{۲}+۱$ را در صورت وجود بیابید.

پاسخ سؤالات تستی

۱- گزینه (ج) صحیح است.

۲- گزینه (ب) صحیح است.

۳- گزینه (الف) صحیح است. کوچکتر مضرب مشترک مخرج توانای $x^{\frac{۳}{۴}},\ x^{\frac{۱}{۲}}$ را در نظر می گیریم.

۴- گزینه (الف) صحیح است.

$$x^۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

۵- گزینه (د) صحیح است.

۶- گزینه (الف) صحیح است.

$$(A + B^T)^T = A^T + (B^T)^T = A^T + B$$

۷- گزینه (ج) صحیح است.

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲x & ۷ \end{vmatrix} = ۱۴ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۷$$

۸- گزینه (ب) صحیح است.

۹- گزینه (ب) صحیح است.

$$Q^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$Q^۳ = Q^۲.Q = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱۰- گزینه (د) صحیح است.

$$|A| = \begin{vmatrix} -۴ & -۳ & -۳ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ -۴ & ۴ & ۳ \end{vmatrix} = ۱ \Rightarrow A^{-۱} = \text{adj}A \Rightarrow A.\text{adj}A = I$$

$$AA = \begin{bmatrix} -۴ & -۳ & -۳ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۴ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۴ & -۳ & -۳ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۴ & ۴ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I \Rightarrow A = A^{-۱} \Rightarrow \det A = \det A^{-۱}$$

۱۱- گزینه (الف) صحیح است.

۱۲- گزینه (ج) صحیح است.

۱۳- گزینه (الف) صحیح است. چون دترمینان حاصل از مجموعه بردارها مخالف است

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = -۲ \neq ۰ \Rightarrow$$ مستقل خطی است

۱۴- گزینه (د) صحیح است.

$$A = \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۲ & ۶ & -۲ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow r(A) \langle n = ۳$$

۱۵- گزینه (ج) صحیح است.

$$\Delta x=\begin{vmatrix} ۶ & ۱ & -۱ \\ -۲ & -۴ & ۲ \\ ۰ & ۵ & ۱ \end{vmatrix}=-۷۲ \Rightarrow x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-۷۲}{-۳۶}=۲$$

۱۶- گزینه (ج) صحیح است.

۱۷- گزینه (ج) صحیح است.

۱۸- گزینه (ب) صحیح است.

$$\lim_{(x,y,z)\to(۰,\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})} \sin(x+۲y-z)=\lim \sin(۰+\pi-\frac{\pi}{۲})=\sin\frac{\pi}{۲}=۱$$

۱۹- گزینه (ج) صحیح است.

$$f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}.du+\frac{\partial f}{\partial y}.dy=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}.dx+\frac{۱}{۲\sqrt{y}}dy=\frac{۱}{۴}\times ۰/۱+\frac{۱}{۶}\times ۰/۲=۰/۰۵۸$$

۲۰- گزینه (د) صحیح است.

پاسخ سؤالات تشریحی

۱- الف) $\int \frac{(۱-\sqrt{x})^۲}{\sqrt{x}}dx$

$$U=۱-\sqrt{x} \Rightarrow dU=-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}du$$

$$\int \frac{(۱-\sqrt{x})^۲}{\sqrt{x}}dx=-۲\int(۱-\sqrt{x})^۲(-\frac{dx}{۲\sqrt{x}})=-۲\int U^۲dU=-\frac{۲}{۳}U^۳+C$$

$$=-\frac{۲}{۳}(۱-\sqrt{x})^۳+C$$

ب) $$\int_۰^۲ e^{-\frac{۳}{۲}x}dx=-\frac{۲}{۳}\int_۰^۲ e^{-\frac{۳}{۲}x}(-\frac{۳}{۲}dx)=-\frac{۲}{۳}e^{-\frac{۳}{۲}x}\Big]_۰^۲$$

$$=-\frac{۲}{۳}e^{-۳}-(-\frac{۲}{۳})=-\frac{۲}{۳}e^{-۳}+\frac{۲}{۳}$$

۲- $۳A-۲c=۴B \Rightarrow ۲c=۳A-۴B \Rightarrow c=\frac{۱}{۲}[۳A-۴B]$

$$C=\frac{۱}{۲}\left[\begin{bmatrix} ۶ & -۶ \\ ۱۲ & ۱۸ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱۲ & ۲۰ \\ -۸ & ۰ \end{bmatrix}\right]=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۶ & -۲۶ \\ ۲۰ & ۱۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳ & -۱۳ \\ ۱۰ & ۹ \end{bmatrix}$$

۳-

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}\xrightarrow[R_۳-۳R_۱]{R_۲-۲R_۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ & -۴ \\ ۰ & -۳ & -۸ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(-۱)^۲\times ۱\times\begin{vmatrix} -۱ & -۴ \\ -۳ & -۵ \end{vmatrix}=۵-۱۲=-۷$$

$$|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}=\frac{۱}{-۷}$$

۴- معادله چهارم دو برابر معادله اول است بنابراین معادله اول را می نویسیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & -۲ & ۱ \\ ۴ & -۳ & -۱ & ۳ \end{array}\right]\xrightarrow[R_۳-۴R_۱\to R_۳]{R_۲-۳R_۱\to R_۲}\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & -۵ & -۵ & -۵ \\ ۰ & -۱۱ & -۵ & -۵ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{R_۲}{-۵}\to R_۲}\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱۱ & -۵ & -۵ \end{array}\right]\xrightarrow{R_۳+۱۱R_۲\to R_۳}\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۶ & ۶ \end{array}\right]$$

$$\frac{R_۳}{۶}\to R_۳\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right]\xrightarrow[R_۲-R_۳\to R_۲]{R_۱-R_۳\to R_۱}\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۱-۲R_۲\to R_۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین $x_۳=۱, x_۲=۰, x_۱=۱$ جواب منحصر به فرد دستگاه است.

۵-

$$\begin{cases} f_x=۲x=۰\Rightarrow x=۰ \\ f_y=-۲y=۰\Rightarrow y=۰ \end{cases}$$

نقطه (۰و۰) نقطه بحرانی است.

$f_{xx}=۲ \qquad f_{yy}=-۲ \qquad f_{xy}=۰$

$\Delta=f_{xx}f_{yy}-[f(x,y)]^۲=\Delta(۰,۰)=۲\times -۲-۰=-۴\langle ۰$ نقطه زین اسبی است

منابع

ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت انتشارات دانشگاه پیام نور مؤلف: لیدا فرخو